



**Università degli studi di Padova**

**DICEA**

**Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale**

**TESI DI LAUREA**

Studio degli effetti dell'interazione terreno-struttura  
nella progettazione di serbatoi circolari.

Laureanda:  
***Veronica Zanellato***

Relatore:  
***Professore Giampaolo Cortellazzo***

A.A. 2012 / 2013



Agli zii Lorenzo e Gabriella,  
gli zii che non saprò mai ringraziare abbastanza  
per questo immenso dono.



# INDICE

Introduzione .....	1
Capitolo 1: Interazione terreno-struttura.....	3
Capitolo 2: Modelli di suolo .....	7
2.1 - Metodi esistenti.....	8
2.1.1 - Terreno come mezzo elastico continuo .....	8
2.1.2 - Suolo elastico alla Winkler.....	11
2.2 - Nuove prospettive .....	22
2.2.1 - Winkler-Type Simplified Continuum (WTSC) .....	22
2.2.2 - Modello di Vlazov .....	24
2.2.3 - Modello RSC: Reissner Simplified Continuum .....	26
2.2.4 - Nuovo modello “Kerr-Reissner Modificato”.....	32
Capitolo 3: Aree sollecitate: profondità della zona d’influenza.....	39
3.1 - Le tensioni nel sottosuolo .....	41
3.2 - Profondità delle zone d’influenza: soluzione proposta da J. A Charles.....	43
Capitolo 4: Influenza del comportamento non lineare del terreno nelle interazioni terreno-struttura .....	51
4.1 - Esempio .....	55
Capitolo 5: Analisi dell’ interazione terreno-struttura nella progettazione di serbatoi circolari .....	57
5.1 - Modellazione numerica del comportamento di fondazioni superficiali su cui agisce un carico verticale distribuito.....	57
5.1.1 - La struttura.....	58
5.1.2 - Il terreno.....	59
5.2 - Le analisi .....	61
5.2.1 - ANALISI LINEARI .....	61
5.2.1.1 - Analisi lineare del modello tridimensionale .....	61
5.2.1.2 - Analisi lineare con il modello di Winkler.....	62



5.2.1.3 - Analisi lineare con il modello MK-R di Horvath .....	62
5.2.2 - ANALISI NON LINEARI.....	63
5.3 - Risultati .....	64
5.3.1 - serbatoio di raggio 16m .....	64
5.3.2 - serbatoio di raggio 6m .....	72
5.4 - Valore della profondità di influenza H per il modello proposto da Horvath .....	79
5.5 – Analisi parametriche.....	88
Capitolo 6: Confronto tra i risultati.....	97
6.1 - Rigidezza adimensionale relativa piastra-terreno .....	97
6.2 – Considerazioni finali .....	100
Conclusioni .....	105
Bibliografia .....	107
Ringraziamenti .....	109
ALLEGATO A: Metodo degli Elementi Finiti (FEM) e Analisi agli Elementi finiti (FEA) .....	111
ALLEGATO B: Relazione Geologica del Sito in Esame ....	<b>Errore. Il segnalibro non è definito.</b>





# Introduzione

I modelli che generalmente vengono assunti per rappresentare il comportamento del terreno nei problemi di interazione tra terreno e struttura spesso contrastano con la realtà e vengono giustificati principalmente per motivi di praticità e di semplicità. Lo studio di questo genere di problemi, invece, dovrebbe avere come fine non tanto la definizione di algoritmi di calcolo delle strutture, quanto l'acquisizione di metodologie progettuali nelle quali l'influenza dei singoli fattori sia definita razionalmente e risulti equilibrata alla loro reale importanza. La progettazione di strutture tradizionali viene tutt'oggi condotta applicando ipotesi di comportamento e modelli teorici molto limitati, sia sotto l'aspetto descrittivo delle proprietà dei terreni, sia sotto quello concettuale. La schematizzazione del suolo più comunemente usata è quella proposta da Winkler, il quale ipotizzava il terreno come un liquido di peso specifico  $k$  nel quale la fondazione galleggia.

Nel presente lavoro, verranno confrontati diversi modelli di suolo e comparati i risultati ottenuti nel caso di una fondazione superficiale soggetta a carico verticale.

Lo scopo delle analisi è la ricerca di un eventuale modello che possa sostituire il tradizionale "terreno a molle" di Winkler, mantenendo la caratteristica della semplicità ma tenendo conto maggiormente delle numerose variabili che riguardano il terreno. Un modello più avanzato che potrebbe soddisfare queste esigenze è il "Kerr-Reissner Modificato" di J. S. Horvath, in quanto schema ibrido tra un approccio meccanico (con elementi meccanici come molle, membrane, etc) e il concetto di "mezzo continuo elastico semplificato".

L'elaborato si divide in 2 parti principali:

- Una sezione iniziale descrittiva dove sono presentati in via del tutto teorica i modelli di suolo tradizionali e le nuove prospettive che si stanno sviluppando negli ultimi anni;
- Una sezione di analisi di una fondazione superficiale in calcestruzzo, soggetta ad un sistema di carichi verticali poggianti sia su un suolo reale, con stratigrafia precisa, sia su terreno ideale.

I risultati ottenuti dalle varie analisi verranno commentati e confrontati.



# Capitolo 1: Interazione terreno-struttura

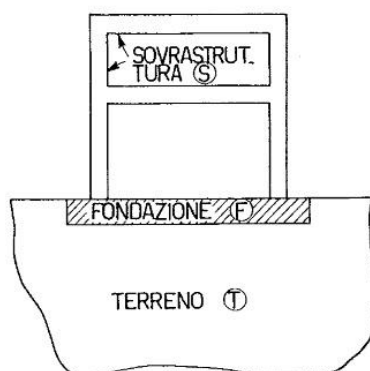


Fig 1.1 – Schema tipo per lo studio di interazione terreno-fondazione-sovrastuttura

In questi ultimi anni si è avuto un notevole aumento di interesse per i problemi d'interazione tra struttura e terreno. Il problema è uno dei più complessi: anche se negli ultimi anni la disponibilità dei calcolatori elettronici ed il conseguente sviluppo dei metodi di calcolo numerico ha permesso considerevoli passi in avanti nella soluzione di questo problema, i sistemi adottati finora rimangono limitati. La difficoltà, per esempio, sta nella scelta di un modello fisico matematico che descriva in modo più appropriato la deformazione dei terreni di fondazione o la determinazione sperimentale dei parametri geotecnici che caratterizzano il modello in questione; inoltre, è fondamentale capire lo sviluppo di procedimenti che permettano di tener conto della variazione nel tempo delle caratteristiche di deformabilità, sia del terreno sia dei materiali costituenti la struttura di fondazione. Se il terreno di fondazione non è assimilabile ad una roccia (in ambito ingegneristico convenzionalmente si definisce “roccia” un materiale caratterizzato da una velocità delle onde di taglio  $V_s$  maggiore di 700÷800 m/s), si genera interazione tra terreno e struttura. Tale fenomeno è noto in letteratura come SSI (*Soil Structure Interaction*).

La definizione matematica del problema di questo tipo di interazione rappresenta una delle sfide concettuali più importanti attinenti il confine labile tra l'ingegneria geotecnica e l'ingegneria strutturale; l'obiettivo prioritario consiste nella definizione di una legge che leghi l'andamento delle pressioni di contatto con le conseguenti deformate o cedimenti. In questo studio sono coinvolte un gran numero di variabili, a partire dalla geometria della fondazione, dalla rigidità relativa dell'insieme fondazione-terreno, dalla distribuzione del carico, dalle condizioni di scabrezza del contatto, dal legame costitutivo assunto, ecc. “senza dimenticare che il problema è infinitamente iperstatico, essendo praticamente infiniti i punti di contatto tra la

fondazione ed il terreno, tanto da non poter essere risolto ricorrendo alle sole leggi di equilibrio”(Caputo V., 1995).

Lo studio dell'interazione tra struttura e fondazioni è essenziale per assicurare il buon funzionamento della fondazione stessa e mantenere entro livelli accettabili le sollecitazioni e le deformazioni della costruzione sovrastante. La fondazione è soggetta ai carichi applicati (distribuiti o concentrati, spesso trasmessi mediante vincoli di tipo iperstatico), al peso proprio ed alle reazioni del terreno sul piano di appoggio: il calcolo delle sollecitazioni e quindi il suo dimensionamento richiedono la determinazione delle reazioni del terreno  $p(x)$  e dalle forze trasmesse iperstaticamente dalla sovrastruttura. Il problema viene generalmente risolto imponendo sul piano di appoggio la congruenza degli spostamenti della fondazione e del terreno; ciò permette di aggiungere alle equazioni di equilibrio delle forze un numero di equazioni di congruenza sufficienti per rendere determinato il problema. I fattori principali che influiscono sul comportamento dei due materiali a contatto (terreno e calcestruzzo della fondazione e/o sovrastruttura) e inoltre sui valori di  $p(x)$ :

*a) Fattori dipendenti dal terreno:*

- Caratteristiche della curva sforzi-deformazioni;
- Livello delle sollecitazioni trasmesse dalla fondazione al terreno riferite al valore della pressione critica e a quella di rottura;
- Aderenza e/o attrito sulla fondazione;
- Eterogeneità ed anisotropia rispetto ai parametri di deformazione;
- Tempo (inteso come fattore che influenza le caratteristiche di deformazione del terreno);
- Modalità di esecuzione degli scavi.

*b) Fattori dipendenti dal comportamento della fondazione e della sovrastruttura:*

- Rigidezza flessionale relativa alla fondazione;
- Rigidezza flessionale relativa della sovrastruttura;
- Geometria del problema (carichi, dimensioni in pianta della fondazione riferite allo spessore di terreno compressibile, affondamento relativo del piano di campagna, rapporto tra i lati di fondazione, eventuale presenza di fondazioni vicine);
- Livello delle sollecitazioni riferite al valore di quella corrispondente all'inizio della fessurazione;
- Tempo (inteso come fattore che influenza le caratteristiche di deformabilità della fondazione e/o struttura);
- Modalità e tempi costruttivi;

- Deformazioni dovute a variazioni della temperatura.

Da questo elenco si evince che una soluzione “rigorosa” del problema è molto difficile da ottenere per l'impossibilità di reperire un modello matematico che possa rappresentare tutti gli aspetti fisici sia della scarsità di misure sperimentali complete che offrano una guida sicura ai ricercatori. Vengono di seguito esposti i vari modelli di suolo, partendo da quelli più comunemente utilizzati per arrivare ai più recenti metodi proposti.



## Capitolo 2: Modelli di suolo

I modelli di suolo sono espressioni matematiche sviluppate nello spazio bidimensionale che approssimano il comportamento di masse di terreno tridimensionali; non sono modelli costitutivi completi, ma nati per “catturare” gli aspetti comportamentali chiave di specifiche interazioni terreno-struttura (SSI).

Negli ultimi anni abbiamo assistito ad una crescita significativa della capacità elaborativa e della velocità di calcolo numerico dei personal computer, che ha permesso uno sviluppo verticale delle possibilità offerte dai software di analisi di mezzi continui bidimensionali e tridimensionali e del lavoro con modelli numerici anche nell'ambito operativo personale. Questi modelli nel continuo consentono l'uso di schemi costitutivi che hanno il potenziale di trattare un vasto intervallo di comportamenti del terreno.

I modelli di suolo non danno come risultato il reale comportamento del terreno che si sta analizzando, ma un'approssimazione partendo da aspetti specifici del materiale, usando delle equazioni differenziali per passare dalla tridimensionalità alla bidimensionalità. Sebbene queste schematizzazioni siano solamente un'approssimazione della realtà, sono stati elementi importanti sia nella pratica nell'ingegneria geotecnica che nella ricerca per oltre 200 anni: questo per la loro relativa semplicità, adattabilità ed efficienza analitica in molte applicazioni di interazioni terreno-struttura.

Nessun modello, comunque, riesce a tener conto contemporaneamente di tutte le variabili in gioco (eterogeneità del terreno, spessore dello strato compressibile, variabilità del modulo elastico con la profondità, etc) per cui nei casi più complessi e più significativi sotto l'aspetto progettuale si ricorre a codici di calcolo che permettono analisi agli elementi finiti, in cui il terreno può essere descritto da leggi costitutive sofisticate e la modellazione di strati molto diversi dal punto di vista geometrico e meccanico non rappresenta un problema; è necessario però ricordare che l'impiego di leggi di comportamento sofisticate richiede un'accurata scelta dei parametri caratterizzanti il materiale, parametri non facili da determinare con le usuali prove in sito e in laboratorio.

Esistono vari metodi apparentemente non collegati tra loro, ognuno basato su modelli matematici diversi, che vengono usati o suggeriti per l'analisi di fondazioni dirette sollecitate da un carico statico. Ovviamente ciascuno di questi non presenta lo stesso grado di accuratezza nei risultati.

## 2.1 - Metodi esistenti

### 2.1.1 - Terreno come mezzo elastico continuo

In qualsiasi struttura a contatto con il terreno, per trasferirvi carichi esterni o per sostenerne il peso, le tensioni che punto per punto sono applicate alla superficie di contatto dipendono dalle caratteristiche meccaniche del terreno e della struttura. La loro valutazione ha un'importanza fondamentale sia per lo studio degli effetti prodotti nel terreno, sia per il progetto delle strutture.

La trattazione della trave su suolo elastico è un tipico esempio di problema diffusivo, ovvero il carico concentrato viene distribuito su una zona di terreno più ampia rispetto alla sua impronta. La trave è in grado di assorbire il carico in funzione del rapporto tra la sua rigidezza flessionale e quella del terreno: più la trave risulta rigida e meglio viene distribuito il carico. In questo caso, la struttura è appoggiata su un terreno che viene ipotizzato come mezzo continuo elastico (Fig. 2.1).

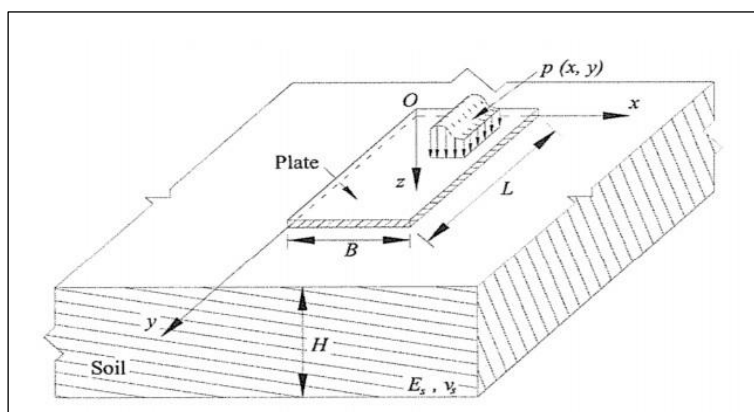


Fig. 2.1 – Piastra poggianti su uno strato elastico

È bene sottolineare come il terreno non possa rigorosamente essere definito come un mezzo elastico, visto che non resiste a trazione. Tuttavia la schematizzazione elastica, se opportunamente discussa, può essere considerata valida, come meglio spiegato nel seguito. Una prima classificazione, per la caratterizzazione meccanica del terreno che costituisce il supporto della struttura, può essere effettuata distinguendo due tipologie di terreno: il terreno coerente ed il terreno incoerente. Il terreno può essere definito coerente se la deformazione del terreno dovuta all'applicazione del carico interessa porzioni di terreno esterne all'impronta di carico, cioè se il terreno ha la capacità di trasferire sforzi di taglio. Questo caso rappresenta, in generale, il comportamento di terreni argillosi o rocciosi (Fig. 2.2).



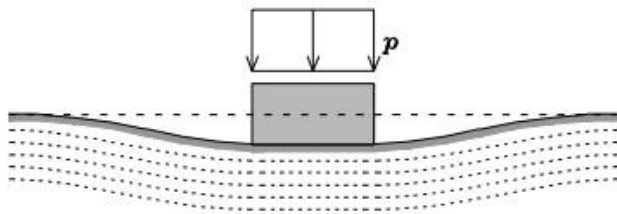


Fig. 2.2 – Terreno di tipo coerente

Il terreno può essere definito incoerente se la deformazione del terreno dovuta all'applicazione del carico avviene senza perturbare le zone esterne all'impronta di carico. Il terreno incoerente può subire dilatazioni e contrazioni, ma non scorrimenti angolari: il terreno incoerente non può trasferire sforzi di taglio (Fig. 2.3).

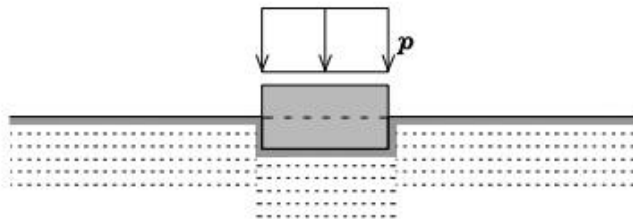


Fig. 2.3 – Terreno di tipo incoerente

Per la stima approssimata dell'incremento delle tensioni verticali nel sottosuolo, da cui principalmente dipendono i cedimenti in superficie, si fa spesso riferimento al modello di semispazio omogeneo, isotropo, elastico lineare e senza peso, che, pur avendo comportamento per molti aspetti diverso da quello dei terreni reali, fornisce soluzioni sufficientemente accurate ai fini progettuali.

Le principali differenze tra il modello del continuo elastico e i terreni reali, sono:

- Raramente i depositi di terreno reale sono costituiti da un unico strato di grande spessore, più spesso sono stratificati e ogni strato ha differente rigidezza, e/o è presente uno strato roccioso (bedrock) di rigidezza molto superiore a quella degli strati sovrastanti;
- Anche nel caso di terreno omogeneo, la rigidezza dei terreni reali non è costante ma tende a crescere con la profondità;
- I terreni reali non sono isotropi. Il rapporto tra i moduli di deformazione in direzione verticale ed orizzontale  $E_v/E_h$  è di norma maggiore di uno per terreni normalmente

consolidati e debolmente sovraconsolidati, mentre è minore di uno per terreni fortemente sovraconsolidati;

- L'ipotesi di elasticità lineare può essere accolta solo per argille sovraconsolidate e sabbie addensate limitatamente a valori molto bassi di tensione, ma non è accettabile per tutti gli altri casi.

La non corrispondenza tra le ipotesi del modello e la realtà fisica, porta a risultati generalmente inaccettabili in termini di deformazioni calcolate, ma accettate limitatamente alla stima delle tensioni verticali. Quindi, con una procedura teoricamente non corretta ma praticamente efficace e molto comune in ingegneria geotecnica, si utilizzano modelli diversi (leggi costitutive diverse) per risolvere aspetti diversi dello stesso problema. Per esempio, per una stessa fondazione superficiale, si utilizza il modello rigido-perfettamente plastico per il calcolo della capacità portante, il modello continuo elastico lineare per la stima delle tensioni verticali, il modello edometrico per il calcolo dei cedimenti, il modello di Winkler per il calcolo delle sollecitazioni nella struttura di fondazione, etc...

## 2.1.2 - Suolo elastico alla Winkler

Il suolo elastico alla Winkler è un modello matematico del terreno adottato nel problema del calcolo delle fondazioni. Questa teoria è basata sul presupposto che il suolo, in un punto generico, ceda proporzionalmente al valore che la componente normale della forza superficiale assume nel punto stesso; il cedimento è elastico, ed indipendente dalla forza esercitata negli altri punti. Dal punto di vista fisico, il mezzo alla Winkler può essere assimilato ad un letto di molle elastiche mutuamente indipendenti, o meglio a un liquido di peso specifico  $k$  nel quale la fondazione galleggia.

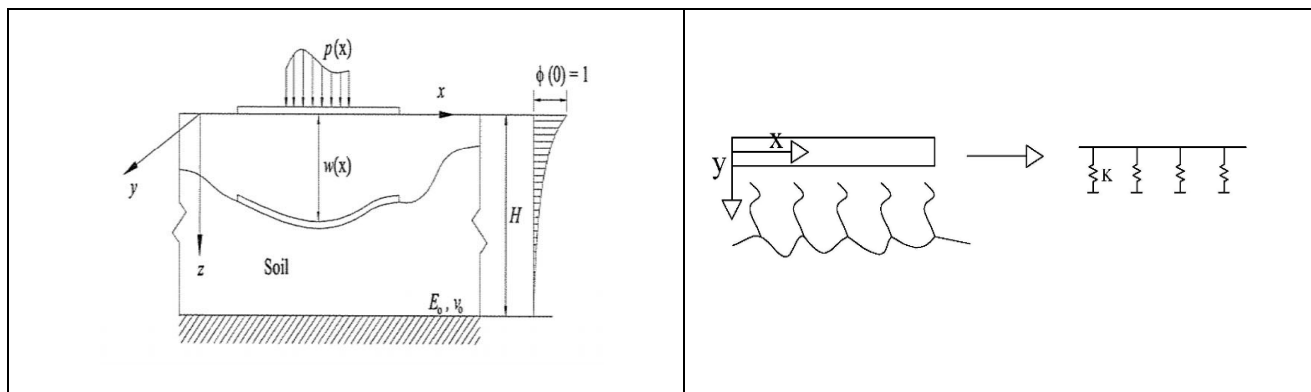


Fig. 2.4 – Trave poggianti su uno strato elastico.

Fig. 2.5 – Esempio di modellazione di terreno alla Winkler

$E_0, v_0$  = parametri elastici del terreno  
 $H$  = spessore dello strato di terreno considerato elastico, isotropo ed omogeneo al di sopra del piano rigido.  
 $\phi(z)$  = modulo di deformazione variabile con la profondità.

Considerando una trave elastica di lunghezza  $L$  e larghezza  $B$ , è possibile scrivere l'equazione della linea elastica, dove  $q(x)$  è il carico effettivo applicato alla trave,  $w(x)$  è lo spostamento verticale dell'elemento strutturale, mentre  $r(x)$  è la reazione dell'appoggio elastico continuo (integrale della funzione della pressione di contatto  $p(x)$ ).

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - r(x) = q(x) - \int_{-B/2}^{B/2} p(x, y) dy$$

La scelta dell'equazione costitutiva ha un'importanza determinante in relazione della possibilità di analisi del modello con i mezzi (analitici, numerici, analogici) propri dell'ingegneria. Il successo del modello di Winkler è stato determinato dalla possibilità di ottenere una soluzione analitica, mentre l'ipotesi di semispazio elastico omogeneo ed isotropo ha avuto diffusione per via del significato fisico dei parametri che caratterizzano il modello anche se è necessario ricorrere ad una soluzione numerica.

## Coefficiente di reazione del terreno “k”

Il coefficiente di reazione del terreno è, per definizione, il rapporto fra carico e cedimento. In un terreno reale il cedimento dipende, oltre che dai valori del carico e dalle proprietà del terreno, anche dalla forma e dalle dimensioni della fondazione e dalla costituzione del sottosuolo. E' noto che il coefficiente di sottosuolo k non è una proprietà solo ed esclusivamente del terreno, e quindi non ha senso fornire valori tipici per tipo di terreno. Per di più, il problema principale di questo metodo è proprio la determinazione del valore di k, in quanto spesso il terreno è stratificato e quindi il valore del coefficiente di sottofondo dovrebbe dipendere dallo spessore dello strato di terreno interessato dalle sollecitazioni e dalle sue caratteristiche.

In via generale, vengono assegnati valori di k sulla base di un valore  $\bar{k}$ , relativo alla risposta del terreno caricato con una piastra di dimensioni standard b x b, che può essere determinato come media di numerose prove di carico effettuate in sito. Valori empirici di  $\bar{k}$ , relativi a sabbie ed argille preconsolidate sono riportati rispettivamente nelle tabelle 2.1 e 2.2 (Terzaghi, 1955).

Densità relativa della sabbia	Sciolta	Media	Densa
sabbia secca o umida (valori limite)	0,7 ÷ 2,1	2,1 ÷ 10,8	10,8 ÷ 36
sabbia secca o umida (valori proposti)	1,4	4,7	18
sabbia in acqua (valori proposti)	0,9	2,9	11

Tab. 2.1 – Valori di  $\bar{k}$  ( $kg/cm^3$ ) per le sabbie

Consistenza della argilla	Compatta	Molto compatta	Dura
valori della resistenza a compressione ( $kg/cm^2$ )	1 ÷ 2	2 ÷ 4	> 4
valori limite	1,8 ÷ 3,6	3,6 ÷ 7,2	7,2
valori proposti	2,7	5,4	10,8

Tab. 2.2 – Valori di  $\bar{k}$  ( $kg/cm^3$ ) per le argille preconsolidate

In esse compaiono, accanto ai valori limite, i valori medi proposti per ciascun tipo di terreno. Attraverso questi valori, ottenuti con piastre quadrate di dimensioni 30 x 30 cm o per travi lunghe circa 30 cm, è possibile risalire al valore della costante di sottosuolo k, da introdurre nel calcolo, utilizzando le seguenti formule semi-empiriche proposte da Terzaghi:

$$k = \bar{k} * \left( \frac{b}{1.5 * B} \right) \quad \text{per le argille}$$

$$k = \bar{k} * \left(\frac{B+b}{2B}\right)^2 \quad \text{per le sabbie}$$

Con B = larghezza della trave.

Tali formule sono considerate valide dal momento che le pressioni esercitate sul terreno della struttura di fondazione risultano inferiori alla metà del carico di rottura del terreno stesso e questa è una condizione largamente soddisfatta per i valori dei coefficienti di sicurezza usualmente adottati in fondazione.

L'uso del metodo di Winkler nelle applicazioni, però, richiede una particolare attenzione nella scelta del giusto valore di k da adottare, caso per caso, in funzione dei fattori quali il modello del sottosuolo, la dimensione e la forma della fondazione. Se usato con giudizio, il metodo fornisce, nella maggior parte delle applicazioni a livello strutturale, risultati senz'altro accettabili purchè ci sia una stima ragionevole del valore k. Ciò non vale per il calcolo dei cedimenti della struttura, in quanto il valore dell'abbassamento è proporzionale al coefficiente di sottosuolo e un errore di questo del 20÷30% porta ad un'inesattezza del valore del cedimento non trascurabile.

Per quanto riguarda il coefficiente di sottofondo k, si è notato che:

- k varia con l'intensità del carico: tanto più aumenta la pressione p, tanto più k diminuisce;
- k varia con la velocità di applicazione del carico; inoltre se p resta costante o varia poco nel tempo, k diminuisce;
- se il suolo è immerso in falda permanente, k diminuisce di circa il 40% rispetto ai corrispondenti valori in assenza di falda;
- k è tanto più piccolo quanto maggiore è la superficie di contatto fondazione-suolo.

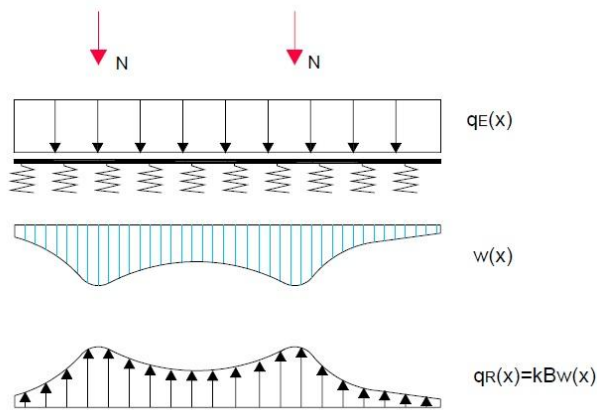
### *Il modello*

Il modello di Winkler, al solo fine del calcolo delle sollecitazioni sugli elementi strutturali, caratterizza il sottosuolo attraverso una relazione lineare tra il cedimento di un punto dell'interfaccia terreno-fondazione, e la pressione  $\sigma_T(x)$  agente nello stesso punto.

La relazione è del tipo:

$$\sigma_T(x) = kw(x)$$

Dove  $k$   $[F/L^3]$  è detta “costante di sottofondo” o “coefficiente di reazione del terreno” ed è valutabile in funzione del tipo di terreno e  $w(x)$  è la funzione abbassamento della trave. Tale modello dunque equivale ad una trave poggiante su un letto di molle, sulla quale agiscono le azioni dovute al peso proprio, quelle provenienti dalla sovrastruttura ed infine le reazioni del terreno che, come detto in precedenza, sono proporzionali agli abbassamenti. In particolare la reazione del terreno, sotto forma di carico lineare, si esprime come:



$$q_R(x) = \sigma_T(x)B = kBw(x)$$

avendo indicato con  $B$  la larghezza della trave nella zona a contatto con il terreno.

Si valuta la funzione abbassamento attraverso l'espressione generica dell'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}$$

Dove il carico  $q(x)$  rappresenta il carico netto agente sulla fondazione, ovvero:

$$q(x) = q_E(x) - q_R(x) = q_E(x) - kBw(x)$$

$q_E(x)$  = qualunque carico distribuito non proveniente dal terreno

Si ha quindi:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q_E(x) - kBw(x)}{EJ}$$

dalla quale si ottiene:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{kBw(x)}{EJ} = \frac{q_E(x)}{EJ}$$

che è l'**equazione della trave elastica su suolo elastico**.

La soluzione di questa fornisce la funzione abbassamento, dalla quale una volta nota possono ricavarsi tutte le grandezze meccaniche e cinematiche.

Ponendo  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k \cdot b}{4EJ}}$ , l'equazione diventa:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\alpha^4 w(x) = \frac{q_E(x)}{EJ}$$

Per una trave su suolo elastico di lunghezza  $L$  si dimostra che:

- se  $\alpha L \leq \frac{\pi}{4}$  la trave si può considerare rigida su un suolo elastico, e la funzione abbassamento coincide con una retta, di conseguenza anche le pressioni del terreno varieranno con legge lineare. Il problema è risolvibile semplicemente applicando le espressioni di Navier per le sezioni pressoinflesse a tutta l'area di impronta della fondazione (trapezio delle tensioni).
- se  $\alpha L > \frac{\pi}{4}$  la trave si considera deformabile e si analizza come una trave elastica su un suolo elastico, per cui è necessario risolvere l'equazione differenziale sopra riportata per valutare la risposta.

In realtà il problema non dipende dalla sola rigidezza della trave, ma dall'interazione mutua che hanno terreno e trave di fondazione. E' di fatto quindi un problema di rigidezza relativa, per cui la stessa trave poggiante su due terreni con caratteristiche diverse potrebbe essere considerata sia rigida che deformabile.

Il termine " $\alpha L$ " è proprio il discriminante di questi due modelli alternativi poiché tiene conto sia delle caratteristiche elastiche e geometriche della trave, che delle caratteristiche del terreno sottostante ( $k$ ).

## Trattazione analitica

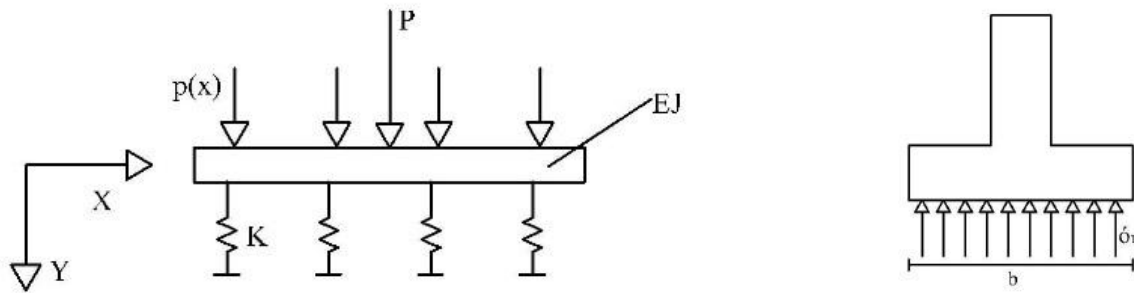


Fig. 2.6 – Trave appoggiata al suolo alla Winkler

Si consideri una trave prismatica di larghezza  $b$ , di sezione costante e con rigidezza flessionale  $EJ$  (supposta costante), appoggiata su un suolo alla Winkler con costante elastica  $k$ ; si supponga:

- $\sigma_T$  costante sulla larghezza  $b$ ;
- la deformabilità a taglio trascurabile.

Il problema risulta essere infinitamente iperstatico; per risolverlo si può applicare l'equazione della linea elastica alle derivate quarte:

$$y^4(x) = \frac{p(x) - r(x)}{EJ} \quad \text{con } r(x) = \sigma_T(x) \cdot b = \text{risposta del suolo al carico applicato}$$

$$y^4 = \frac{p(x) - \sigma_T \cdot b}{EJ} = \frac{p(x) - k_T \cdot b \cdot y(x)}{EJ}$$

Si ottiene così:

$$y^4(x) + \frac{k_T \cdot b}{EJ} y(x) = \frac{p(x)}{EJ}$$

La soluzione di questa equazione differenziale è data dalla somma di un integrale particolare  $y_P(x)$  e di uno generale  $y_0(x)$ :

$y(x) = y_0(x) + y_P(x) + 4$  condizioni al contorno (2 di tipo cinematico e due di tipo statico).



CASO SEMPLICE DI TRAVE DI LUNGHEZZA ILLIMITATA CON CARICO CONCENTRATO:

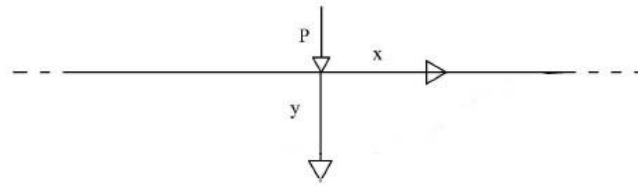


Fig. 2.7 – Trave illimitata con carico concentrato e sistema di riferimento

Viene considerata una trave di lunghezza illimitata; in questo caso la soluzione è del tipo:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Inizialmente si risolve l'integrale particolare  $y_p(x)$ :

$$y^4 + 4\alpha^4 y = \frac{p(x)}{EJ}$$

dove  $\alpha$  rappresenta la rigidezza relativa tra terreno e trave e ha valore  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k \cdot b}{4EJ}}$

Se si sceglie come integrale particolare  $y_p(x) = \frac{p(x)}{k_T \cdot b}$ , si ottiene

$$0 + \frac{4k_T \cdot b}{4EJ} \cdot \frac{p(x)}{4k_T \cdot b} = \frac{p(x)}{EJ}$$

che è proprio l'integrale cercato.

Se si è in presenza di un carico distribuito  $p(x)$  (come ad esempio il peso proprio), risulteranno delle traslazioni verso il basso che possono essere trascurate; si può allora non considerare l'integrale particolare  $y_p(x)$ .

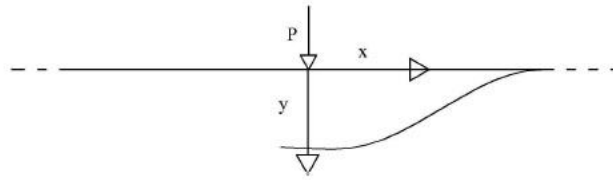
Passando all'integrale generale dell'omogenea associata  $y_0(x)$ :

$$y^4(x) + 4\alpha^4 y(x) = 0$$

risolvendo si ottiene:

$$y_0(x) = e^{-\alpha x} [A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)] + e^{\alpha x} [C \sin(\alpha x) + D \cos(\alpha x)]$$

Rispetto al sistema di riferimento della figura 2.7 il problema è simmetrico.



Vengono quindi ricercate le condizioni al contorno:

- per  $x \rightarrow +\infty$   $y(x) = 0$  e  $y'(x) = 0$  quindi  $D = C = 0$
- per  $x \rightarrow 0$  per simmetria la deformata ha tangente orizzontale pari a zero, quindi:
  1.  $y'(0) = 0$
  2.  $-y'''(x) \cdot EJ = V(x) \rightarrow -y'''(0) \cdot EJ = -\frac{P}{2}$

In conclusione si ottiene:

$$y'''(0) \cdot EJ = \frac{P}{2 \cdot EJ}$$

A questo punto si possono ricavare anche i coefficienti A e B:

$$y_0(x) = e^{-\alpha x} [A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)]$$

$$\rightarrow y'_0(x) = -\alpha \cdot e^{-\alpha x} [A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)] + \alpha \cdot e^{\alpha x} [A \cos(\alpha x) - B \sin(\alpha x)]$$

$$\rightarrow y'_0(0) = 0 \quad \rightarrow -\alpha \cdot B + \alpha \cdot A = 0 \quad \rightarrow A = B$$

$$\rightarrow y'(x) = -2\alpha A e^{-\alpha x} \sin(\alpha x)$$

Derivando quest'ultima due volte e sostituendo a  $y'''(0) = \frac{P}{2 \cdot EJ}$ , si ottiene il valore di A:

$$A = \frac{P \cdot \alpha}{2k_T \cdot b}$$

E si è giunti quindi alla soluzione del problema:  $y(x) = \frac{P \cdot \alpha}{2k_T \cdot b} \cdot e^{-\alpha x} [\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)]$ .

Si procede andando a tracciare il grafico delle azioni interne; visto che il problema è simmetrico, si può lavorare considerando solo metà della struttura (estendendo poi i risultati dall'altra parte).

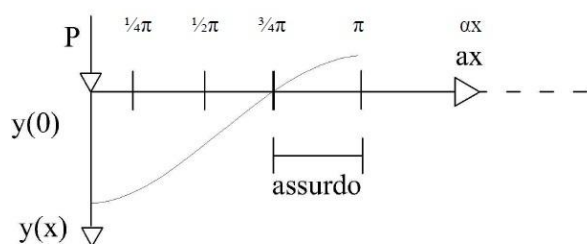


Fig.2.8 – Andamento della funzione  $y(x)$

In figura 2.8 è riportato il diagramma della funzione  $y(x)$  appena trovata. Si può notare come la funzione abbia come deformata l'abbassamento in zero smorzato della funzione  $e^{-\alpha x}$ . Per  $(\alpha x) = \frac{3}{4} \pi$  la  $y(x)$  diviene negativa, il che significa che si verificherebbero delle trazioni, ovvero dei sollevamenti del terreno: condizione non accettabile per il tipo di problema in esame.

Per  $(\alpha x) = \frac{3}{4} \pi$ , la  $y(x)$  diviene negativa, il che significa che in quelle condizioni si verificherebbero delle forze di trazione che porterebbero al sollevamento del terreno: condizione non accettabile per il tipo di problema in esame. Si nota però che per  $(\alpha x)$  variabile da  $\frac{3}{4} \pi$  a  $\pi$ , la deformata è solo il 4% del totale e può quindi essere trascurata.

Si tracciano poi i diagrammi del momento flettente e del taglio per un carico concentrato  $P$ .

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{P\alpha^3}{k_T \cdot b} \cdot e^{-\alpha x} [\sin(\alpha x) - \cos(\alpha x)] = \frac{P\alpha^4}{k_T \cdot \alpha \cdot b} \cdot e^{-\alpha x} [\sin(\alpha x) - \cos(\alpha x)] \\ &= \frac{P \cdot k_T \cdot b}{4\alpha \cdot EJ \cdot k_T \cdot b} e^{-\alpha x} [\sin(\alpha x) - \cos(\alpha x)] \end{aligned}$$

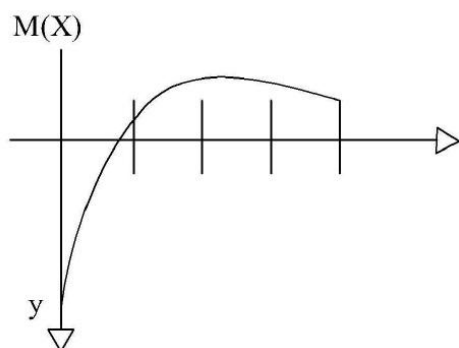
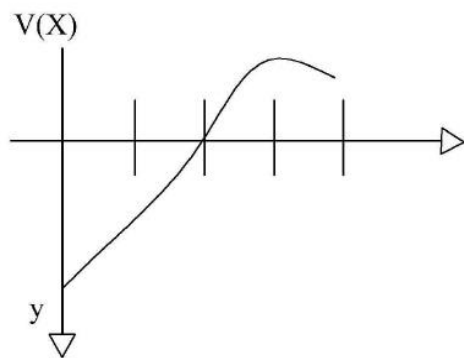


Fig.2.9 – Andamento del momento flettente  $M(x)$

Visto che  $-y''(x) \cdot EJ = M(x)$  e che  $M(0) = \frac{P}{4\alpha}$ , allora

$$M(x) = M(0) \cdot e^{-\alpha x} [\sin(\alpha x) - \cos(\alpha x)]$$

Si può notare come  $M_{max} = M(0)$  smorzato della quantità  $e^{-\alpha x}$ .



Passando al taglio  $V(x)$ :

$$-y'''(x)EJ = V(x)$$

$$V(x) = V(0) \cdot e^{-\alpha x} \cos(\alpha x)$$

$$\text{Con } V(x) = -\frac{P}{2}$$

Fig.2.10 – Andamento del taglio  $V(x)$

La stessa trattazione può essere fatta applicando una forza di momento flettente alla trave ed è possibile la sovrapposizione degli effetti.

Il modello di suolo alla Winkler si rivela particolarmente adatto a modellare le fondazioni flessibili monodimensionali che lavorano in condizioni di deformazione piana (pali di fondazione soggetti a carichi orizzontali, non a carichi distribuiti).

Esso trova larghissimo impiego per la progettazione di strutture di fondazioni superficiali per la sua semplicità. Modelli più complessi presuppongono complesse indagini geotecniche che per loro natura forniscono parametri comunque approssimati.

Tuttavia tale modello presenta anche una serie di difetti, essendo una schematizzazione “limitata”:

- si ottengono buoni risultati quando la fondazione viene sollecitata con una forza concentrata; ciò non avviene quando il carico è distribuito (situazione che maggiormente si affronta nello studio dell'interazione terreno-fondazione). Nelle fondazioni continue poggiate su terreni e soggette a carichi distribuiti, infatti, dai calcoli effettuati sulla base di questo modello risultano nulle le sollecitazioni nella fondazione, perché si trova che la reazione vincolare è speculare al carico;
- il modello trascura il comportamento del terreno al di fuori dell'impronta della fondazione ma il terreno che, salvo rotture, è un mezzo continuo, nella realtà si deforma anche al di

fuori dell'impronta di carico. Un limite che nega, di fatto, l'interazione tra fondazioni adiacenti e che entra in contrasto con le stesse previsioni normative, considerato che la Circolare n. 617 (2 febbraio 2009) al paragrafo C6.4.2.2 cita: "Sulla base della previsione dei cedimenti deve esprimersi un giudizio sulla loro ammissibilità con riferimento ai limiti imposti dal comportamento statico e dalla funzionalità del manufatto. Qualora il manufatto in progetto possa influire sul comportamento statico e sulla funzionalità di manufatti adiacenti, il giudizio di ammissibilità deve essere esteso a questi ultimi";

- come specificato inizialmente, il modulo di Winkler non è una proprietà del terreno, ma dipende dallo stato tenso-deformativo. Va quindi fatta un'analisi più approfondita della semplice applicazione del metodo;
- nella progettazione strutturale si preferisce assumere un intervallo di variazione piuttosto che un unico valore del modulo di Winkler in modo da involuppare le sollecitazioni agenti sull'elemento strutturale di fondazione: tale range può essere ricavato da tabelle in funzione del terreno o da un riscontro con l'ingegnere geotecnico. I parametri geotecnici, inoltre, variano, anche in maniera consistente in uno stesso sito, con la profondità e a seconda del punto in cui vengono fatte le indagini. Pertanto per la progettazione di strutture di fondazione con l'utilizzo di modelli matematici del terreno più sofisticati non è in genere giustificato.

## 2.2 - Nuove prospettive

Per capire il significato e i limiti del modello di Winkler e del relativo coefficiente di sottofondo “k”, sono stati fatti numerosi studi. Negli ultimi tempi sono state portate a termine nuove ricerche che hanno permesso di introdurre nuovi modelli.

### 2.2.1 - Winkler-Type Simplified Continuum (WTSC)

Questa nuova prospettiva si basa sulla teoria dell’elasticità e utilizza la stessa equazione differenziale del modello di Winkler. Nel modello WTSC la geometria del problema consiste in uno strato elastico di spessore finito H ed estensione laterale infinita, poggiante su uno strato rigido e sottoposto ad un carico perpendicolare  $p(x, y)$ . Tutte le tensioni e deformazioni sono uguali a zero, tranne quelle verticali  $\sigma_z$  ed  $\varepsilon_z$ .

Partendo da queste ipotesi, il modello WTSC consente di risolvere i seguenti casi:

- $E=A$  modulo di deformazione del terreno costante con la profondità;
- $E=A+Bz$  il modulo di deformazione del terreno varia linearmente con la profondità;
- $E=A+Bz^{0.5}$  il modulo di deformazione del terreno varia secondo la radice quadrata della profondità.

Le condizioni al contorno assunte sono:

- Gli spostamenti alla base dello strato elastico sono uguali a zero;
- Le tensioni verticali in ogni punto della superficie sono uguali al carico applicato in quel punto.

L’equazione di equilibrio, poiché tutte le tensioni e deformazioni sono assunte pari a zero (tranne quelle lungo l’asse verticale), diventa:

$$\frac{\delta\sigma_z}{\delta z} = 0$$

Ovvero si impone che  $\sigma_z$  sia costante con la profondità e uguale a  $-p$ . La relazione tra deformazioni e tensioni :

$$\frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\sigma_z}{E}$$

con  $w$  che rappresenta lo spostamento lungo la verticale.

Ipotizzando un modulo di deformazione del terreno costante  $E=A$  e risolvendo l'equazione precedente in base alle condizioni al contorno si ottiene:

$$\delta w = \frac{\sigma_z \delta z}{E} = -\frac{p}{A} \delta z$$

da cui:

$$w = -\frac{p}{A}(H - z)$$

e quindi:

$$W = \frac{p}{A} H$$

Riordinando i termini si ha:

$$p = \frac{A}{H} W = k_{sc} W \Rightarrow k_{sc} = \frac{A}{H}$$

Dove  $k_{sc}$  è il modulo di sottofondo equivalente per un continuo semplificato. Nel caso  $E=A+Bz$  (terreno con modulo di deformazione che varia linearmente con la profondità), il modulo può essere espresso come:

$$k_{sc} = \frac{B}{\ln(A + BH) - \ln(A)}$$

Mentre nel caso in cui  $E=A+Bz^{0.5}$ , si ha:

$$k_{sc} = \frac{B^2}{2[(A + BH^{0.5}) - A \ln(A + BH^{0.5}) - A + A \ln(A)]}$$

Come nel modello di Winkler, è di fondamentale importanza determinare il valore di  $k_{sc}$ ; la sua valutazione si basa principalmente su due punti: la determinazione del valore e della variabilità di  $E$  (modulo di Young), e la scelta dello spessore dello strato elasticamente deformabile  $H$ . La scelta dello spessore  $H$  è influenzata dalle dimensioni dell'area di carico rispetto alla profondità dello strato indeformabile. Infatti, se l'area di carico è piccola rispetto alla profondità dello strato rigido, allora è preferibile scegliere un valore di  $H$  minore rispetto al reale spessore dello strato deformabile; nello specifico,  $H$  dovrebbe essere scelto in base alla profondità alla quale i cedimenti risultano trascurabili.

Se invece l'area di carico è grande rispetto alla profondità dello strato rigido, allora  $H$  dovrebbe assumere un valore uguale a tale profondità.

In via generale:

$$H = I_k b$$

dove  $I_k$  è un coefficiente che richiede ulteriori studi per la determinazione e  $b$  è la larghezza dell'area di carico. È evidente che  $k_{sc}$  varia indirettamente con l'estensione dell'area di carico. In conclusione, il modello WTSC non è altro che un'evoluzione del metodo di Winkler, nel quale viene considerato il comportamento di un corpo elastico di spessore  $H$  dove solo le tensioni e gli spostamenti lungo la verticale hanno valore diverso da zero e sono causati da un carico normale alla superficie uniformemente distribuito. Il modulo di sottofondo  $k_{sc}$ , ricavato dal modulo di Young dello strato deformabile e dallo spessore  $H$ , ha un valore più razionale rispetto al  $k$  di Winkler (che nella maggior parte dei casi viene ricavato da tabelle o grafici).

### 2.2.2 - Modello di Vlazov

Questa nuova proposta nasce per ricercare un nuovo valore del coefficiente  $k$  da utilizzare nel modello di Winkler per l'analisi di piastre soggette ad un carico concentrato o uniformemente distribuito. Le novità consistono nell'introduzione di un parametro di taglio e l'utilizzo di parametri adimensionalizzati. Come nei modelli visti precedentemente, si parte sempre con l'ipotesi che lo strato di terreno sia deformabile, di spessore finito e che si appoggi direttamente su uno strato indeformabile, rigido.

L'equazione che governa il modello di Vlazov è stata adimensionalizzata utilizzando i parametri "r" e "D":

$$r = \sqrt[4]{\frac{DH}{E_s}} \quad \text{con } D = \frac{E_f h^3}{12(1-\nu_f^2)} = \text{rigidezza flessionale della piastra di fondazione}$$

dove:

$E_s$  = modulo di deformazione del terreno;

$H$  = spessore dello strato deformabile di terreno.



Le coordinate degli assi e lo spostamento lungo la verticale  $w$  vengono adimensionalizzati in questo modo:

$$X = x/r;$$

$$Y = y/r$$

$$Z = z/r$$

$$W = w/r$$

L'equazione di Vlazov diventa quindi:

$$\nabla^4 W - 2T_n \nabla^2 W + K_{nv} = Q_n$$

dove:

$$K_{nv} = \frac{kr^4}{D} = \text{modulo di sottofondo del terreno adimensionale};$$

$$2T_n = \frac{2tr^2}{D} = \text{parametro di TAGLIO del terreno adimensionale};$$

$$Q_n = \frac{qr^3}{D} = \text{carico distribuito adimensionale}.$$

L'equazione in questione non dipende dalle dimensioni della piastra di fondazione : l'effetto della dimensione della fondazione si può considerare introducendo il parametro  $2a/r$ . Si noti che annullando il termine  $T_n$ , l'equazione di Vlazov si riduce ad una forma adimensionale del modello di Winkler. Questo modello consente quindi di determinare  $k$ , basandosi sulle proprietà e la geometria della piastra e del terreno, e di utilizzarlo per analizzare piastre appoggiate su uno strato medio di terreno utilizzando come base il conosciuto modello di Winkler.

### 2.2.3 - Modello RSC: Reissner Simplified Continuum

Anche questo modello si basa sulla teoria dell'elasticità. Reissner suggerì che le varie equazioni che governano il comportamento dello strato del terreno considerato elastico possono essere risolte più facilmente considerando solo certe tensioni del corpo.

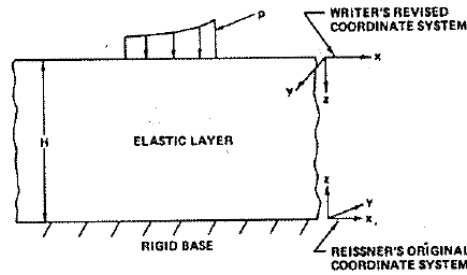


Fig.2.11 – Modello di Reissner

Egli risolse il problema assumendo le tensioni  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  uguali a zero e il modulo di Young  $E$  costante con la profondità.

Le equazioni differenziali vengono ottenute attraverso il rapporto tensione-deformazione, il rapporto spostamento-deformazione e le equazioni di equilibrio che governano il comportamento di un corpo elastico. Per sviluppare il modello RSC, sia le forze applicate al corpo che le condizioni di compatibilità tra tensioni e deformazioni non vengono considerate.

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} \text{a } z = H & \quad u = v = w = 0 \\ \text{a } z = 0 & \quad \sigma_z(x, y) = -p(x, y) \\ & \quad W = w(x, y, 0) = 0 \\ & \quad u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0 \end{aligned}$$

Inoltre,  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

Partendo da queste ipotesi, si possono definire le tensioni rimanenti:  $\sigma = \sigma_z$ ;  $\tau_x = \tau_{xz}$ ;  $\tau_y = \tau_{yz}$ .

Combinando le varie equazioni dei rapporti tensione-deformazione, spostamento-deformazione e inserendo i giusti valori delle varie tensioni, si ottiene:

$$\frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\sigma}{E} \qquad \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = \frac{\tau_x}{G} \qquad \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} = \frac{\tau_y}{G}$$

Queste sono le formule iniziali da cui poi si otterrà il modello di Reissner.

Le equazioni di equilibrio semplificate sono:

$$\frac{\delta \tau_x}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta \tau_y}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta \tau_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_y}{\delta y} + \frac{\delta \sigma}{\delta z} = 0$$

Per semplicità nelle derivazioni che seguono:

$$Q = \frac{\delta \tau_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_y}{\delta y}$$

CASO E=A (Modulo di Young costante con la profondità)

Quello che segue è il modello originale del modello di Reissner.

Partendo dall'equazione:  $\frac{\delta \tau_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_y}{\delta y} + \frac{\delta \sigma}{\delta z} = 0$  :

$$\delta \sigma = -Q \delta z \Rightarrow \sigma = \int -Q \delta z \Rightarrow \sigma = -Qz + c + f(x, y)$$

dove  $c$  è un valore costante ottenuto dall'integrazione e  $f(x,y)$  è una funzione d'integrazione in  $x$  o in  $y$ , o in entrambe. A  $z=0$ ,  $\sigma = -p$ , perciò

$$c + f = -p$$

$$\sigma = -p - Qz$$

Si noti che questo implica che  $\sigma$  varia linearmente con la profondità.

Dall'equazione iniziale  $\frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\sigma}{E}$  si ottiene invece:

$$\delta w = \frac{\sigma}{E} \delta z \Rightarrow w = \frac{1}{E} \int \sigma \delta z \Rightarrow w = \frac{1}{E} \int (-p - Qz) \delta z \Rightarrow w = \frac{1}{E} \left( -pz - Q \frac{z^2}{2} \right) + c + f(x, y)$$

A  $w=0$  e  $z=0$  :

$$0 = -\frac{1}{E} \left( pH + Q \frac{H^2}{2} \right) + c + f \Rightarrow c + f = \frac{1}{E} \left( pH + Q \frac{H^2}{2} \right) \Rightarrow w = p \left( \frac{H}{E} - \frac{z}{E} \right) + Q$$

Quando  $w(x, y, 0) = W$  :

$$W = p \frac{H}{E} + Q \frac{H^2}{2E}$$

$$Q = \frac{2E}{H} W - \frac{2}{H} p$$

Dall'equazione  $\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = \frac{\tau_x}{G}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta z} = \frac{\tau_x}{G} - \frac{\delta w}{\delta y} &\Rightarrow u = \int \frac{\tau_x}{G} \delta z - \int \frac{\delta w}{\delta y} \delta z \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= \frac{\tau_x}{G} z - \frac{\delta p}{\delta x} \frac{H}{E} z + \frac{\delta p}{\delta x} \frac{z^2}{2E} - \frac{\delta Q}{\delta x} \frac{H^2}{2E^2} z + \frac{\delta Q}{\delta x} \frac{z^3}{6E} + c + f(x, y) \end{aligned}$$

Assegnando  $u=0$  e  $z=H$ :

$$\begin{aligned} c + f &= -\frac{\tau_x}{G} H + \frac{\delta p}{\delta x} \frac{H^2}{2E} + \frac{\delta Q}{\delta x} \frac{H^3}{3E} \\ u &= \frac{\tau_x}{G} (z - H) + \frac{\delta p}{\delta x} \left( \frac{H^2}{2E} - \frac{H}{E} z + \frac{z^2}{2E} \right) + \frac{\delta Q}{\delta x} \left( \frac{z^3}{6E} - \frac{H^2}{2E} z + \frac{H^3}{3E} \right) \end{aligned}$$

Nello stessa maniera, dall'equazione iniziale  $\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = \frac{\tau_y}{G}$

$$v = \frac{\tau_y}{G} (z - H) + \frac{\delta p}{\delta y} \left( \frac{H^2}{2E} + \frac{z^2}{2E} - \frac{H}{E} z \right) + \frac{\delta Q}{\delta y} \left( \frac{z^3}{6E} + \frac{H^3}{3E} - \frac{H^2}{2E} z \right)$$

Dalle precedenti espressioni di  $u$  e  $v$ , valutate nel punto  $z=0$ , si ottengono:

$$\tau_x = \frac{2G}{3} \frac{\delta W}{\delta x} - \frac{GH}{6E} \frac{\delta p}{\delta y}$$

$$\tau_y = \frac{2G}{3} \frac{\delta W}{\delta y} - \frac{GH}{6E} \frac{\delta p}{\delta x}$$

Dall'equazione  $\frac{\delta \tau_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_y}{\delta y} + \frac{\delta \sigma}{\delta z} = 0$  si ottiene quindi:

$$\frac{2G}{3} \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} - \frac{GH}{6E} \frac{\delta^2 p}{\delta y^2} + \frac{2G}{3} \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} - \frac{GH}{6E} \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} - \frac{2E}{H^2} W + \frac{2p}{H} = 0$$

Visto che  $\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} = \nabla^2$ , sostituendo i termini si ottiene:

$$\frac{E}{H} W - \frac{GH}{3} \nabla^2 W = p - \frac{GH^2}{12E} \nabla^2 p$$

e quindi ponendo  $C_1 = \frac{E}{H}$ ,  $C_2 = \frac{GH}{3}$  e  $C_3 = \frac{GH^2}{12E}$  l'equazione finale è:

$$C_1 W - C_2 \nabla^2 W = p - C_3 \nabla^2 p$$

dove, appunto,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  sono delle costanti,  $W$  è la superficie verticale di deflessione,  $p$  è la pressione di superficie applicata verticalmente. Le costanti sono solo in funzione dei parametri elastici del corpo ( $E$ ,  $G$ ) e dello spessore ( $H$ ). Questo nuovo approccio è stato applicato per offrire nuovi spunti rispetto al modello di Winkler e di conseguenza al coefficiente di reazione del terreno  $k$ . Purtroppo ad oggi il livello di sviluppo del modello RSC non permette di trattare condizioni di terreno complesse. Nel trattato di Jhon S. Horvath intitolato “New Subgrade Model Applied to Mat Foundation”, l’autore propone di capire la validità del modello RSC con un approccio indiretto, ovvero comparando le soluzioni esatte di vari problemi di elasticità con i risultati ottenuti da diverse teorie. I risultati più interessanti si sono ottenuti con il modello di Winkler; si sono confrontati le varie ipotesi di sollecitazione, e conseguenti risultati, con i valori reali del sito. Nelle figure 2.12 e 2.13 sono rappresentate le tensioni  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  relative ad uno strato di materiale elastico di spessore uguale alla profondità dell’area caricata, secondo la teoria del continuo elastico. In questo caso specifico, più il rapporto di Poisson si avvicina allo zero, più i valori di  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  decrescono proporzionalmente verso lo zero. Non sono disponibili soluzioni per  $\tau_{xy}$  riferiti al bordo dell’area caricata, mentre ha valore nullo nella parte centrale. La variazione di  $\sigma_z$  è pressoché lineare con la profondità, mentre  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  rimangono costanti.

Quindi, le ipotesi e le conseguenze del modello RSC sono ragionevoli e la sua validità si riscontra maggiormente quando il rapporto di Poisson tende a zero. Sempre per confronto, le ipotesi del modello WTSC (in cui tutte le tensioni sono nulle, tranne  $\sigma_z$ ) appaiono troppo semplicistiche.

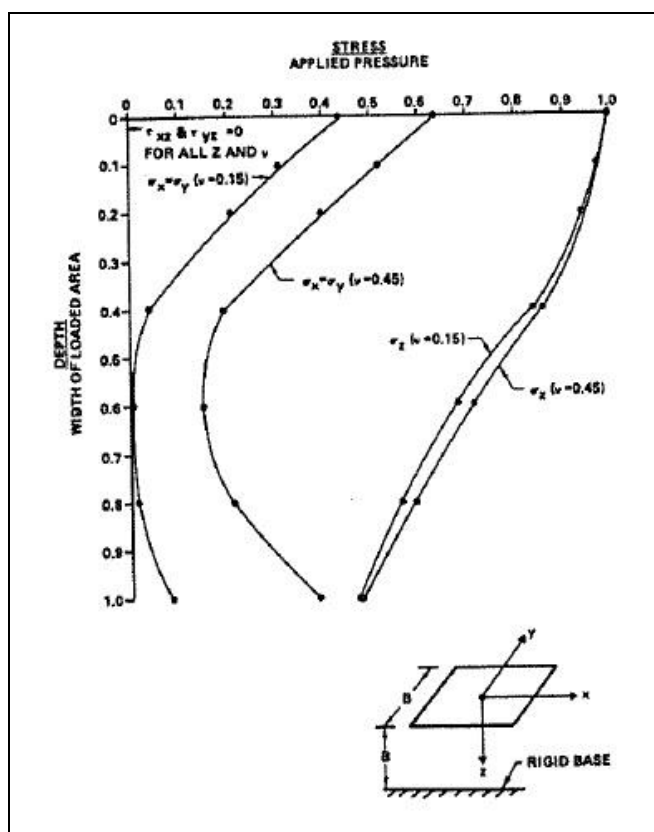


Fig.2.12 – Tensioni nella parte centrale di un'area uniformemente caricata perfettamente flessibile su uno strato di terreno ritenuto omogeneo, isotropico ed elastico di spessore finito.

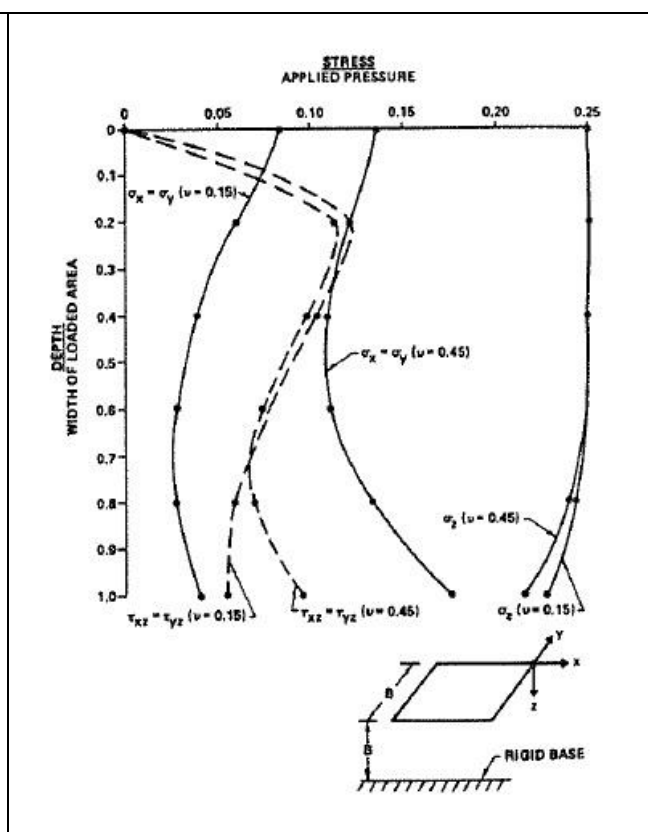


Fig.2.13 – Tensioni agli angoli di un'area uniformemente caricata perfettamente flessibile su uno strato di terreno ritenuto omogeneo, isotropico ed elastico di spessore finito.

Sono state fatte maggiori ricerche riguardo la distribuzione laterale delle pressioni di superficie e degli spostamenti (questi sono parametri molto importanti per l'analisi delle piastre). Poulos e Davis discussero il caso di un'area nastriforme caricata uniformemente. Gli unici parametri stimati da Paulos furono gli spostamenti verticali e orizzontali (normali all'area) al di sotto del bordo dell'area caricata dando più importanza ai movimenti in direzione verticale. La comparazione è stata fatta prendendo come esempio un'area caricata di 15.9 m, uno spessore di strato elastico sempre di 15.9 m, modulo di Young di valore 47,900 kPa e l'intensità di carico di 72 kPa/mq. I risultati del confronto vengono rappresentati in Fig. 2.14 per valore del rapporto di Poisson nullo e 0.5.

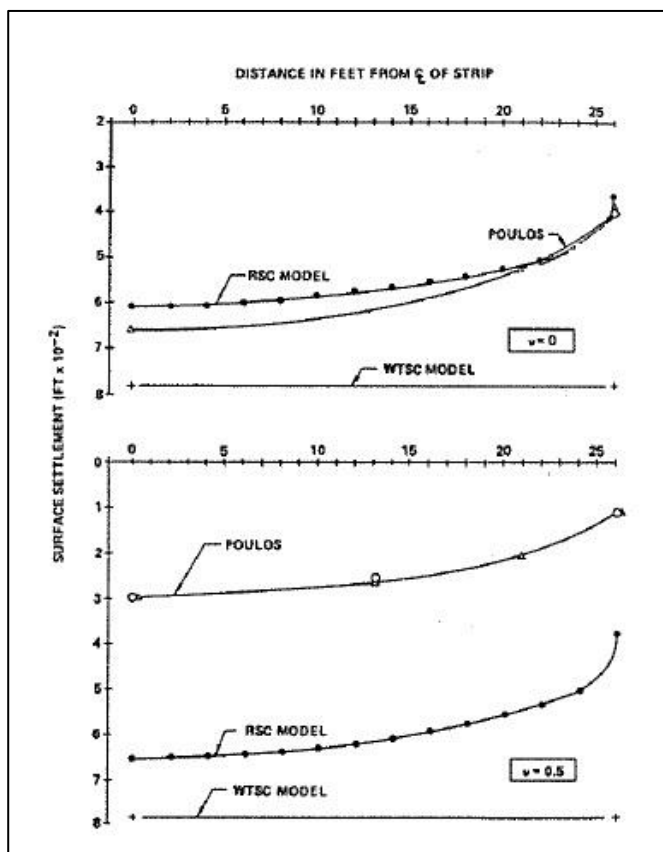


Fig. 2.14 – Disposizione finale della superficie per una fascia flessibile caricata poggiante su uno strato omogeneo, isotropico ed elastico di spessore finito. (1 ft = 0.305 m)

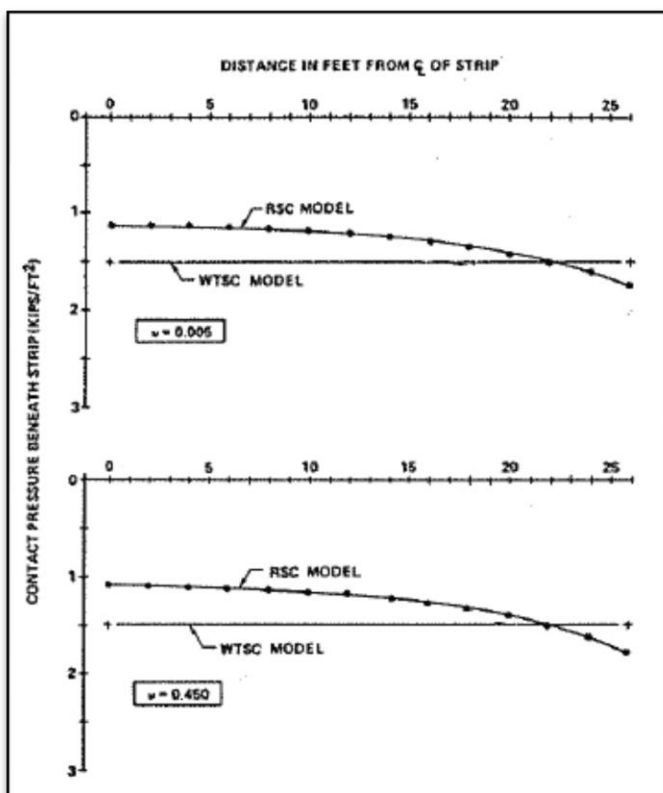


Fig. 2.15 – Pressioni di contatto al di sotto di una fascia flessibile caricata su uno strato omogeneo, isotropico ed elastico di spessore finito. (1 ft = 0.305 m)

In questo caso non vengono ammessi slittamenti delle superfici di contatto tra fascia/strato elastico e strato elastico/base rigida.

Per trovare i risultati numerici del problema è stata utilizzata un'analisi ad elementi finiti.

Dai risultati ottenuti, il modello RSC ha un forte riscontro con la teoria dell'elasticità (per uno strato elastico con modulo di Young costante e di spessore uguale alla profondità dell'area caricata), almeno per i valori del rapporto di Poisson prossimi a zero. Tuttavia, anche per gli altri valori di Poisson, il modello RSC è più vicino alle soluzioni della teoria dell'elasticità rispetto al modello WTSC. In conclusione, il modello Reissner Simplified Continuum mostra maggior compatibilità con le soluzioni esatte derivanti dalla teoria dell'elasticità e lo si può considerare come una forma migliorata del metodo di Winkler.

#### 2.2.4 - Nuovo modello “Kerr-Reissner Modificato”

La ricerca di modelli più completi rispetto al metodo di Winkler è stata condotta negli anni attraverso due approcci concettuali distinti.

1. Approccio meccanico: consiste nell'elaborazione di modelli strutturali partendo da una base rigida e aggiungendo varie combinazioni di elementi meccanici (molle assiali, membrane a tensione costante, strati resistenti a forze di taglio e piastre soggette solo a flessione). Un numero infinito di questi elementi meccanici può essere associato al comportamento di un mezzo continuo elastico lineare. Il più semplice di questi è proprio il modello di Winkler, in quanto il terreno viene semplificato una serie di molle assiali *indipendenti* tra loro.
2. Concetto di “mezzo continuo elastico semplificato”: in questo caso, vengono ipotizzati i termini di tensioni e spostamenti nelle equazioni costitutive di equilibrio e di compatibilità che descrivono il comportamento di uno strato linearmente elastico di spessore finito che appoggia su uno strato rigido. Se l'approccio meccanico parte da una fase più semplice per poi aumentare il grado di complessità, in caso di mezzo continuo avviene il contrario: la fase iniziale coincide con il problema reale che poi viene semplificato perdendo quindi di complessità (ma anche di accuratezza).

Ovviamente entrambi gli approcci hanno aspetti più o meno positivi. L'approccio meccanico è più semplice da visualizzare e risolvere usando programmi commerciali di analisi strutturali; il problema sta nel definire con esattezza gli elementi meccanici specifici del caso in esame (un



esempio è la chiara difficoltà dello stabilire un valore del coefficiente di reazione del terreno  $k$  ). Maggiore è il numero di elementi meccanici che vengono aggiunti alla situazione “base”, e minore sarà l’accuratezza del risultato finale. Nell’altro caso, invece, i vari parametri sono più facili da determinare, ma più difficili da inserire nei software al momento disponibili.

Ciò che rende il modello Modified Kerr-Reissner (MK-R) unico tra i vari modelli proposti negli ultimi tempi, è il fatto di aver sviluppato un approccio *ibrido*: i due metodi precedentemente descritti sono stati uniti in modo da poter sfruttare i lati positivi di entrambi. Essenzialmente, il modello MK-R è composto dal modello meccanico di Kerr modificato e dal modello di mezzo continuo semplificato di Reissner.

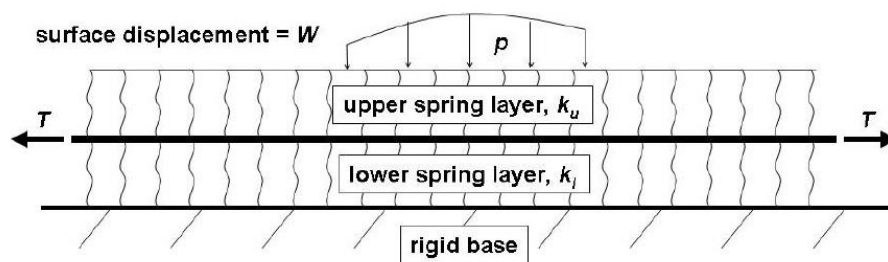


Fig. 2.16 – Schematizzazione del modello di suolo meccanico di Kerr modificato

Il modello di Kerr modificato, rappresentato in fig. 2.16, è ciò che viene fisicamente modellato nei software commerciali di analisi strutturale. Il modello in questione consiste in due strati distinti di molle assiali dove è inserita una membrana sollecitata da una costante forza di trazione,  $T$ .

Nello specifico, gli strati superiore ed inferiore consistono in un letto di molle assiali, indipendenti, lineari che agiscono solamente in direzione verticale e che hanno rigidezza rispettivamente  $k_u$  e  $k_l$ ; la membrana in tensione, invece, consiste in un foglio continuo perfettamente flessibile sollecitato a trazione in direzione orizzontale ed è proprio l’elemento che unisce i due strati distinti di terreno, cosa necessaria nel modello MK-R. C’è però da specificare il comportamento non lineare della membrana, essenziale per lo sviluppo del modello finale.

L’equazione che definisce il comportamento delle forze verticali- spostamenti è (Eq.1):

$$p - \left( \frac{T}{k_u + k_l} \right) \nabla^2 p = \left( \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} \right) W - \left( \frac{T k_u}{k_u + k_l} \right) \nabla^2 W$$

Come tutti i modelli meccanici, la visualizzazione fisica del problema risulta semplice come anche l'uso del software di analisi strutturale; la difficoltà sta nel determinare i valori di  $k_u$ ,  $k_l$  e  $T$ .

In fig. 2.17 è rappresentato il modello di Reissner (si veda il capitolo precedente)

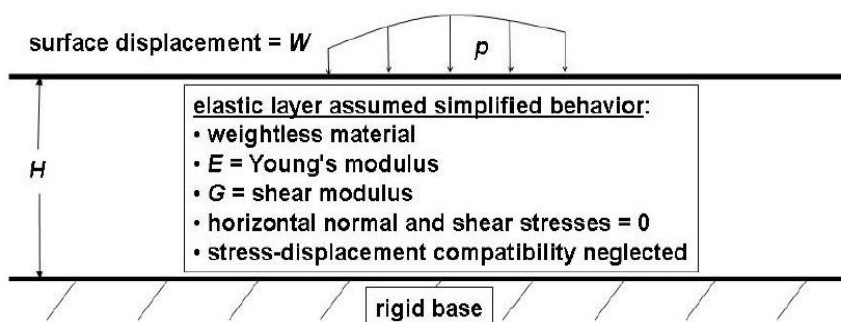


Fig. 2.17 – Schematizzazione del modello di suolo meccanico del mezzo continuo semplificato di Reissner

Quest'ultimo viene sfruttato per dare al modello MK-R una prospettiva geotecnica in termini di condizioni fisiche e proprietà del terreno.

In questo caso, l'equazione che definisce il comportamento delle forze verticali- spostamenti è (Eq.2):

$$p - \left( \frac{GH^2}{12E} \right) \nabla^2 p = \left( \frac{E}{H} \right) W - \left( \frac{GH}{3} \right) \nabla^2 W$$

Mentre il modello è facile da visualizzare fisicamente e i valori dei coefficienti ( $E$ ,  $G$  e  $H$ ) possono essere stimati in maniera precisa per ogni applicazione pratica, si presentano problemi significativi nell'implementare il modello nei software commerciali ad oggi disponibili.

L'aspetto unico e innovativo del modello MK-R deriva dalla combinazione sinergica tra i due modelli sopradescritti fatta in modo da eliminare gli aspetti negativi di ogni modello se considerato in modo indipendente. L'unione di questi due approcci (chiaramente molto diversi tra loro) è stato possibile in quanto il grado di accuratezza è lo stesso, ma soprattutto hanno la stessa forma delle equazioni che descrivono il loro comportamento (Eq.1 ed Eq.2). I coefficienti che appaiono nelle equazioni sono definiti esplicitamente in termini di condizioni fisiche mostrate nella fig.2.17 dove possono essere relazionati agli effettivi spessori e rigidezze del sottosuolo del sito.

$$k_u = \frac{4E}{H}$$

$$k_l = \frac{4E}{3H}$$

$$T = \frac{4GH}{9}$$

Da notare che in caso di elementi strutturali (platee, solette, etc) a contatto con la superficie del terreno, la pressione  $p$  rappresentata nelle fig. 2.16 e 2.17 diventa la reazione del suolo (contatto struttura-suolo o tensione portante). Le relazioni dei coefficienti appena esplicitati sono valide anche in questo caso ma solo se l'interfaccia struttura-terreno viene ipotizzata perfettamente liscia. Per interfacce perfettamente ruvide, le relazioni sono leggermente diverse:

$$k_u = \frac{E}{H} \left( \frac{4H - 3t}{H} \right) \quad k_l = \frac{E}{3H} \left( \frac{4H - 3t}{H - t} \right) \quad T = \frac{GH}{12} \left[ \left( \frac{4H - 3t}{H} \right) + \left( \frac{4H - 3t}{3H - 3t} \right) \right]$$

dove  $t$  = spessore dell'elemento strutturale a contatto con il suolo.

L'uso di qualsiasi modello di suolo più recente alle classiche ipotesi di Winkler, richiede una considerazione particolare delle condizioni ai bordi della piastra; questo perché l'accoppiamento delle molle produce degli spostamenti al di sotto dei bordi della platea per resistere ai cedimenti della struttura. Concettualmente, il terreno al di sotto del perimetro della piastra, agisce proprio per contrastare gli spostamenti della struttura; il materiale di questa zona perimetrale può semplicemente essere modellato impostando che gli spostamenti siano minimi o addirittura fissando certi punti. Il problema, che provoca un errore nel risultato finale, è il determinare la quantità di terreno nei pressi dei bordi da considerare a cui applicare questo comportamento. Inoltre, questa scelta comporta un aumento delle dimensioni del modello da studiare che va ad incidere poi sull'analisi strutturale complessiva. Questo genere di modellazione però può essere sostituito da altri elementi meccanici posizionati sul bordo della struttura.

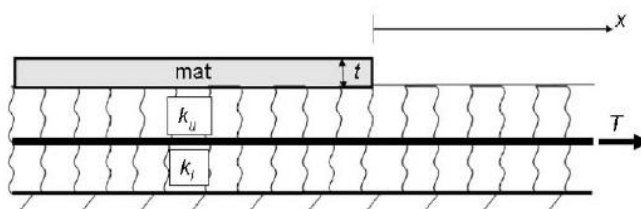


Fig. 2.18 - Modello MK-R completo

La fig. 2.18 è una rappresentazione generica di una piastra di spessore  $t$  appoggiata su un suolo alla MK-R. Per eliminare la necessità di modellazione diversificata nei pressi del perimetro della

piastra, la prima cosa da fare è trovare le quattro condizioni al contorno che fanno riferimento al bordo della struttura. Le due più ovvie, sono le condizioni classiche che si trovano in questo genere di struttura, ovvero la somma delle forze di taglio agenti e dei momenti deve risultare nulla. Le rimanenti coinvolgono il terreno e riguardano le derivate prime delle della reazione del suolo  $p$  e del cedimento della superficie  $W$ . Per risolvere queste condizioni, viene considerata la continuità delle forze di taglio verticali, che partono dall'interno del suolo, per poi passare dall'interno della soletta verso l'esterno, come suggerito originariamente da Reissner (1958). Questo procedimento, infatti, porta ad una soluzione rappresentativa dell'effettivo comportamento del terreno, ovvero si ottiene una crescita graduale della reazione del suolo man mano che ci si avvicina ai bordi della piastra. Usando l'ipotesi di "continuità delle forze di taglio", le condizioni al contorno riducono il problema di determinare la grandezza della serie di forze di taglio verticali che devono essere applicate sul bordo della struttura. Lo scopo è di ridurre queste forze sostituendole o con elementi meccanici o con elementi posizionati proprio sul bordo in modo tale che possano essere implementati nei programmi di analisi strutturali disponibili.

Per iniziare il processo, si deve ipotizzare:

- Le soluzioni si ottengono solo nella dimensione orizzontale perpendicolare ai bordi della piastra (si prenda come sistema di riferimento quello rappresentato nella fig.2.18) in modo che le derivate parziali possano essere sostituite da quelle totali;
- La reazione del suolo  $p$  e tutte le sue derivate sono nulle al di sotto del perimetro della struttura;
- Lo strato di terreno superiore in prossimità del bordo non contribuisce alla resistenza del suolo e quindi si può non considerarlo (fig. 2.19)

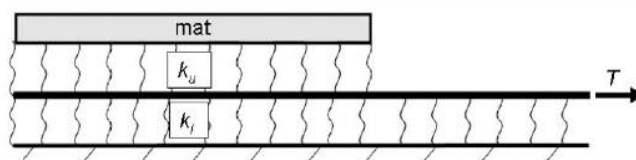


Fig. 2.19 - Modello MK-R effettivo

Il sistema che si è venuto a creare è composto da una membrana in tensione che appoggia su uno strato di molle assiali ed è chiamato "Modello meccanico di Filonenko-Borodich". L'equazione che governa questo sistema nella dimensione piana è (Horvath 1979, 1988, 1989):

$$k_l - T \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

La sua soluzione è:

$$W(x) = C_1 e^{-\sqrt{k_l/T}x} + C_2 e^{-\sqrt{k_l/T}x}$$

Da notare che

- $W(x)=0$  quando  $x \rightarrow \infty$  e questo significa che  $C_1 = 0$
- Quando  $x=0$ ,  $W(x) = W(0) = W_0$  che significa che  $C_2 = W_0$  produce

$$W(x) = W_0 e^{-\sqrt{k_l/T}x} \quad \text{e} \quad \frac{dW(x)}{dx} = \theta(x) = -\sqrt{k_l/T} W_0 e^{-\sqrt{k_l/T}x} = -\sqrt{k_l/T} W(x)$$

dove  $\theta(x)$  = pendenza della membrana in tensione

Al bordo della piastra ( $x=0$ ),  $\theta(x)$  è definito come  $\theta_0$ . La componente verticale delle forze prodotte dalla membrana quando  $x=0$  è  $T \sin \theta_0 \approx T \theta_0$ . L'insieme delle forze verticali prodotte sul bordo della piastra sono orientate verso l'alto e hanno valore  $T \theta_0 = T \left[ \sqrt{k_l/T} W_0 \right]$ . Dividendo quest'ultima per  $W_0$  si ottiene una rigidezza di molla equivalente  $k_{bc}$  :

$$k_{bc} = \frac{T \left[ \sqrt{k_l/T} W_0 \right]}{W_0} = T \sqrt{k_l/T} = \sqrt{k_l T^2/T} = \sqrt{k_l T}$$

Perciò, con il metodo MK-R, gli effetti che si sviluppano al di sotto delle zone limitrofe dei perimetri delle strutture vengono facilmente sostituiti da una serie di molle assiali indipendenti posizionate proprio lungo il perimetro tra la membrana in tensione e la base rigida. Questo viene illustrato in Fig. 2.20. La dimensione di questa linea aggiuntiva di molle di rigidezza  $k_{bc}$  è di  $\sqrt{k_l T}$  per unità di lunghezza del perimetro di fondazione.

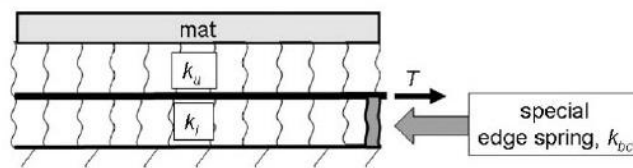


Fig. 2.20 - Modello MK-R equivalente

Il lavoro appena esposto deve essere, ovviamente, preceduto da un'attenta caratterizzazione del terreno (Fig.2.21). Lo studio, infatti, dovrebbe definire adeguatamente la stratigrafia del sottosuolo

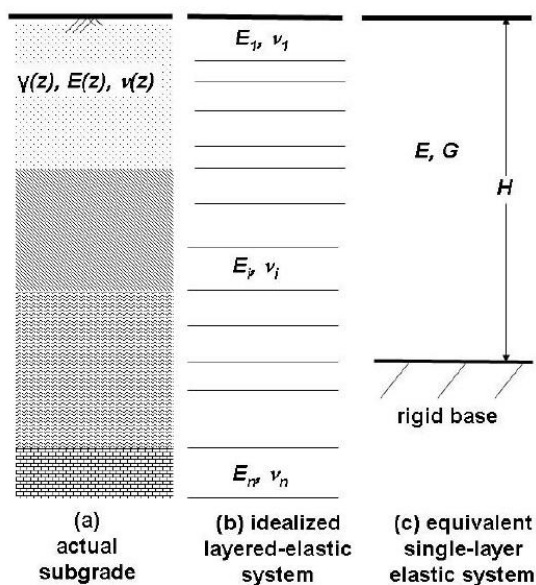


Fig. 2.21 - Stadi per la stima dei parametri che poi verranno utilizzati nel modello MK-R

e le condizioni piezometriche al di sotto del sito di interesse. E' da notare che non sempre è facile definire lo strato base più rigido ad una certa profondità. Questo strato rigido non deve necessariamente essere di natura rocciosa: si potrebbe prendere come piano di appoggio anche uno strato semplicemente più rigido di altri ad una profondità ragionevole. Inoltre, per determinare i parametri del terreno, come per esempio il peso specifico  $\gamma$  (che è funzione della profondità), la caratterizzazione del sito in esame può definire la compressibilità o la rigidezza (modulo di Young  $E$ , modulo di taglio  $G$  e il modulo di Poisson  $\nu$ ) dei vari strati di terreno che si alternano al di sotto del sito in

esame. Questo viene ottenuto grazie ai risultati di prove in sito e prove in laboratorio. In caso di presenza di terreni a grana fine, i parametri devono essere determinati sia in condizioni drenate che non drenate. Le informazioni ottenute dalla fase di caratterizzazione del sito vengono usate per creare un modello analitico idealizzato, come mostrato in fig. 2.21(b). Questo modello consiste di un numero  $n$  di strati artificiali, ognuno dei quali viene ipotizzato come mezzo isotropico, omogeneo e con comportamento elastico-lineare. I valori di  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  dei vari strati artificiali devono essere determinati proprio dalla fase di caratterizzazione del terreno. La parte finale consiste nel convertire il sistema rappresentato in fig. 2.21(b) in quello raffigurato in fig. 2.21(c) che è il modello analitico idealizzato finale del sito. Lo spessore di questo strato,  $H$ , è la profondità dal livello della fondazione ad uno strato di maggiore resistenza preso come base.

Questo modello ibrido, che rappresenta il giusto equilibrio tra la precisione teorica e la facilità di applicazione, viene considerato il tanto atteso "erede" del classico modello di Winkler; si tratta, infatti, di un progresso significativo soprattutto per quanto riguarda l'implementazione e l'uso di programmi di analisi strutturale che attualmente sono in commercio. A differenza delle ipotesi di Winkler, il modello MK-R comprende il comportamento accoppiato delle molle e i suoi coefficienti possono essere stimati in via teorica attraverso una seria caratterizzazione del terreno del sito in esame.

Inoltre, si presta benissimo sia nella risoluzione di problemi pratici, che nell'ambito della ricerca.

## Capitolo 3: Aree sollecitate: profondità della zona d'influenza

Parlando di distribuzione delle tensioni al di sotto di aree caricate, bisogna innanzitutto citare il Metodo di Boussinesq (1885), che consente di assimilare il terreno ad un solido elastico, semi-infinito, omogeneo ed isotropo. Nonostante queste ipotesi piuttosto restrittive, il metodo di Boussinesq per il calcolo dell'incremento dello stato di sforzo prodotto dai carichi di fondazione è tuttora diffusamente usato per ogni tipo di suolo (anche per terreni stratificati). Le cosiddette equazioni di Boussinesq descrivono le tensioni e le deformazioni prodotte nel solido semi-infinito delimitato da una superficie orizzontale e caricato da una forza  $Q$  puntiforme che agisce normalmente ad essa.

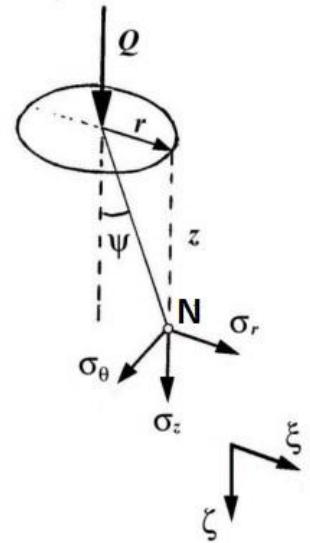


Fig.3.1 – Sistema di riferimento per lo studio del Metodo di Boussinesq

La descrizione delle tensioni prodotte dalla forza  $Q$  è fatta con riferimento alle componenti (Fig. 3.1):

- $\sigma_z$  = tensioni verticali nel punto  $N$  situate alla profondità  $z$  dalla superficie orizzontale ed alla distanza  $r$  dalla verticale per il punto  $a$  di applicazione di  $Q$ ;
- $\sigma_r$  = tensioni radiali orizzontali nel punto  $N$ ;
- $\sigma_\theta$  = tensioni tangenziali orizzontali nel punto  $N$ .

Le equazioni espresse in coordinate cilindriche delle tensioni in un punto  $N$  sono:

$$\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi z^2 \cos^5(\psi)}$$

$$\sigma_r = \frac{Q}{2\pi z^2} \left\{ 3\cos^3(\psi)\sin^3(\psi) - (1 - 2\nu) \frac{\cos^2(\psi)}{1 + \cos(\psi)} \right\}$$

$$\sigma_\theta = -(1 - 2\nu) \frac{Q}{2\pi z^2} \cos^4(\psi) \sin(\psi)$$

$$\tau_{rz} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^4(\psi) \sin(\psi)$$

Si osservi che lo stato di sforzo è indipendente dal Modulo di Young  $E$ , mentre le tensioni tangenziali sono indipendenti dal Modulo di Poisson  $\nu$ . Una volta determinato lo stato di sforzo, è possibile calcolare quello di deformazione dal quale per integrazione si può risalire al campo di spostamenti.

$$\zeta = \frac{Q}{2\pi r} \frac{1+\nu}{E} \{2(1-\nu) + \cos^2(\psi)\} \sin(\psi)$$

$$k = \frac{Q}{2\pi r} \frac{1+\nu}{E} \{-(1-2\nu) + \cos(\psi) + \cos^2(\psi)\} \sin(\psi) \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Nel caso di fondazioni superficiali è possibile calcolare il campo di spostamenti relativo al piano di superficie imponendo le condizioni:

$$z = 0 \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\zeta = \frac{Q}{\pi r} \frac{1+\nu^2}{E}$$

$$k = \frac{Q}{\pi r} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E}$$

Questo problema è quello più semplice dal quale possono essere ricavate altre soluzioni di carico più complesse. Per determinare le altre soluzioni è necessario andare ad applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Se vogliamo determinare le condizioni dello stato di sollecitazione relative ad un carico genericamente distribuito sul piano limite allora consideriamo il contributo alla tensione di una porzione di carico relativa ad un elemento di superficie  $dA = dx dy$ .

Per calcolare la tensione totale integriamo sull'area  $A$  di applicazione del carico. Come esempio possiamo considerare la tensione  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \iint_A \frac{3q(x,y)}{2\pi z^2} \cos^5(\psi) dx dy$$

Dove  $x$  e  $y$  rappresentano le coordinate sulla superficie limite della porzione di carico che induce uno stato tensionale nel generico punto del campo.

Se la legge di variazione del carico  $q(x,y)$  è semplice allora l'espressione dello stato tensionale potrebbe essere rappresentata in forma chiusa; nel caso di leggi più complesse, la porzione di terreno caricata viene suddivisa in più parti sulle quali il carico viene considerato uniforme, in questo modo la distribuzione delle tensioni è data dalla sovrapposizione degli effetti provocati da questa condizione di carico discreta.



I risultati ottenuti da Boussinesq risultano quindi alla base per la determinazione della distribuzione delle tensioni in un terreno dal comportamento elastico lineare.

### 3.1 - Le tensioni nel sottosuolo

Il carico al quale viene sottoposto un terreno, tramite ad esempio una fondazione, deve essere una frazione del carico critico, ossia del carico al limite della deformazione elastica. I carichi applicati sul terreno generano delle tensioni nel sottosuolo e per il loro studio si applicano i procedimenti di calcolo che si basano su dati sperimentali e sulle caratteristiche della terra; tali procedimenti si basano sull'ipotesi, poco verificata, che il terreno sia un materiale perfettamente omogeneo e quindi forniscono risultati piuttosto approssimati, però con grado di approssimazione accettabile per le applicazioni pratiche. In figura 3.2 vengono forniti i valori, o meglio gli incrementi, delle tensioni indotte da un carico verticale  $\Delta q_s$  uniformemente distribuito su un'area circolare di raggio  $R$  sulla superficie di un semispazio elastico (in genere le tensioni calcolate mediante la Teoria dell'Elasticità sono funzione del coefficiente di Poisson  $\mu$ ).

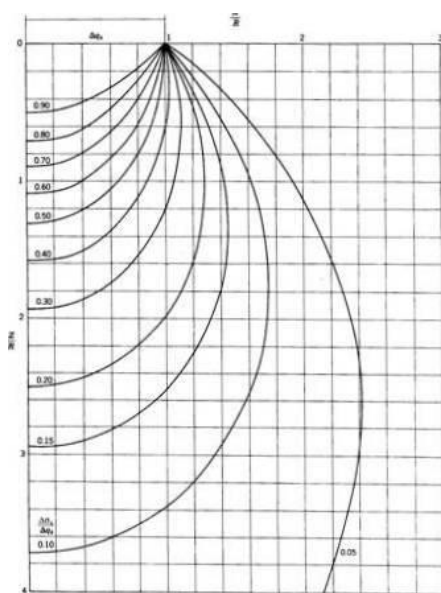


Fig.3.2 – Abaco per incrementi della tensione verticale indotta da un carico uniforme applicato lungo un'area circolare

In ogni caso la componente verticale del tensore degli sforzi indotti dai carichi normali alla superficie è sempre indipendente da  $\mu$  così come quelle indotte da un carico applicato su una striscia. Tali tensioni devono essere sommate alle tensioni geostatiche iniziali. La zona al di sotto dell'area di carico ove le tensioni verticali assumono valori significativi è spesso denominata “bulbo delle tensioni”. Per un'area di carico circolare le tensioni verticali sono  $< 0.15\Delta q_s$  a profondità  $\sim 3R$  e  $< 0.10\Delta q_s$  a profondità  $\sim 4R$ . In genere, quale bulbo delle tensioni, si considera il volume di terreno delimitato da una curva corrispondente a un incremento di tensione pari a  $0.1\Delta q_s$  (scelta tuttavia arbitraria).

E' interessante, a questo punto, determinare la profondità della zona d'influenza prodotta dalle variazioni tensionali di una fondazione in modo tale da poter calcolare gli spostamenti finali causati dal carico. Una soluzione venne proposta da Burland e Burbridge nel loro metodo per la stima del cedimento delle fondazioni su sabbie normalmente consolidate e sovra consolidate dai risultati di prove SPT basata su un'analisi statistica di oltre 200 casi reali. Senza entrare troppo nel dettaglio del metodo, il valore della profondità d'influenza proposto è  $Z_i = B^{0.763}$ , dove B è la larghezza della fondazione in metri (il diametro, nel caso di fondazione circolare). Nella tabella 3.1 vengono presentati i valori ricavati dai numerosi casi reali studiati.

$z_i$ (m)	B (m)
1,63	2
2,19	3
3,24	5
5,56	10
13	30
19,86	50
34	100

Tab. 3.1 - Valori della profondità significativa  $z_i$  in funzione della larghezza (o diametro) B.  
(Burland e Burbridge, 1985)

Il limite di questi valori è il loro riferimento ad un terreno non coesivo; per i terreni coesivi il metodo che Burland propone per la determinazione dei cedimenti non richiede un valore di profondità d'influenza.

### 3.2 - Profondità delle zone d'influenza: soluzione proposta da J. A Charles

---

Viene ora descritta la soluzione di J. A. Charles, sviluppata una decina di anni dopo rispetto a Burland e Burbridge. La variazione di tensione verticale con la profondità al di sotto di un'area caricata può essere prevista con sufficiente precisione ipotizzando il terreno come mezzo elastico continuo, isotropo ed omogeneo. Tuttavia, anche se tale ipotesi prevede adeguatamente la profondità di influenza per fondazioni di piccole dimensioni, essa viene sovrastimata quando il carico in superficie aumenta notevolmente. La proposta di Charles fornisce risultati indicativi in caso di applicazione di carichi particolarmente ampi, mentre non ha effetti significativi per i tipici carichi di fondazione (relativamente ridotti).

Viene introdotto un rapporto di intensità di carico  $n$  di valore:

$$n = q/\gamma b^*$$

dove  $q$  rappresenta la forza verticale applicata sull'area di carico,  $\gamma$  è il peso specifico effettivo del terreno caricato e  $b^*$  è la lunghezza che caratterizza la dimensione della superficie caricata. Il rapporto  $n$  in esame indica la grandezza della pressione  $q$  applicata sulla superficie del terreno in relazione alla tensione efficace verticale  $\gamma b^*$  alla profondità  $b^*$  prima dell'applicazione del carico di superficie. E' quindi funzione sia dell'ampiezza dell'area caricata, sia della pressione applicata.

Ipotizzando come carico un terrapieno di altezza  $h$  e di peso specifico  $\gamma_s$ , la formula precedente diventa:

$$n = \gamma_s h / \gamma b^*$$

In fig. 3.3 sono rappresentate due situazioni di carico; in entrambi i casi la forza  $q$  è applicata verticalmente sulla superficie del terreno. Inizialmente lo stato tensionale nel terreno alla profondità  $z$  è determinato solamente dal peso del terreno sovrastante (si tratta della pressione efficace  $\gamma z$ , in assenza di acqua). L'aumento della tensione verticale dovuta al posizionamento del carico è stata calcolata usando la teoria elastica e, attraverso il principio di sovrapposizione, aggiunta a quella preesistente. Si noti nella figura la distribuzione della tensione verticale totale  $\sigma_v$  alle varie profondità, nei due casi: sebbene la relazione tra la tensione verticale dovuta al carico  $\sigma_v - \gamma z$  e il rapporto di profondità  $z/b^*$  sia lo stesso in entrambi i casi, il rapporto tra l'aumento di tensione e la pressione preesistente è molto differente. A  $(z/b^*)=0.5$ , per esempio, per la base minore (caso a),

l'incremento di tensione dovuto al carico superficiale è molto più grande della pressione che c'era quando il terreno non era sollecitato; per il sovraccarico, invece, l'incremento risulta più piccolo rispetto alle tensioni preesistenti. Esiste quindi una differenza significativa nello stato del terreno nei due casi in quanto allo stesso rapporto di profondità la tensione verticale prima dell'applicazione del carico è molto più grande nel caso del terrapieno rispetto alla base d'appoggio più piccola. Dal momento che di solito la compressibilità decresce all'aumentare della tensione verticale, allo stesso

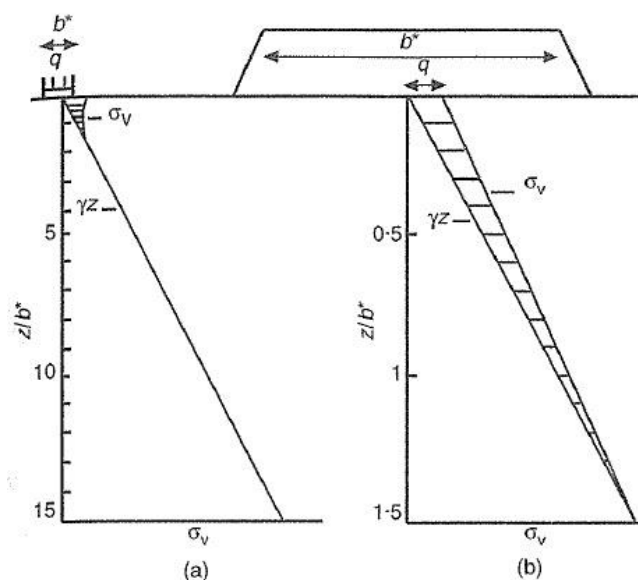


Figura 3.3 – Tensione verticale al di sotto dell'area caricata: (a) base di appoggio; (b) terrapieno

rapporto di profondità il suolo sarà meno compressibile nel caso del terrapieno. Poiché questo effetto è associato alla relazione tensione-deformazione del terreno, può essere trattato attraverso un'analisi elastica. Nel 1977, Burland et al. ripresero i risultati dell'analisi sovraesposta ma conclusero che la distribuzione della tensione verticale precedentemente descritta non fosse corretta in quanto non affetta dalla diminuzione della compressibilità (effetto comunque trascurabile per la risoluzione del problema). Inoltre, poiché lo sforzo di taglio è generalmente proporzionale alla tensione

effettiva, allo stesso rapporto di profondità lo sforzo di taglio sarà maggiore nel caso del terrapieno che nella base minore; dal momento che questo fenomeno viene prodotto dalla resistenza esercitata dal terreno, la teoria elastica è considerata un'analisi troppo limitata per descrivere questo comportamento del suolo assai più complesso.

Per indagare sul fenomeno dell'aumento dello sforzo di taglio con la profondità della zona d'influenza del carico, è stato utilizzato un modello di suolo molto semplice che combina due concetti importanti. Il primo si basa sul metodo razionale studiato da Marston nel 1910 sviluppato per determinare la grandezza e le caratteristiche del carico; questo viene fatto attraverso un'analisi semplificata delle tensioni. Il secondo tratta la determinazione del grado di consolidazione nei terreni coesivi: spesso è stata calcolata usando la distribuzione elastica delle tensioni per individuare lo sforzo aggiuntivo derivante dal carico di superficie e dai risultati delle prove edometriche per capire la comprimibilità del terreno dopo il posizionamento del carico.

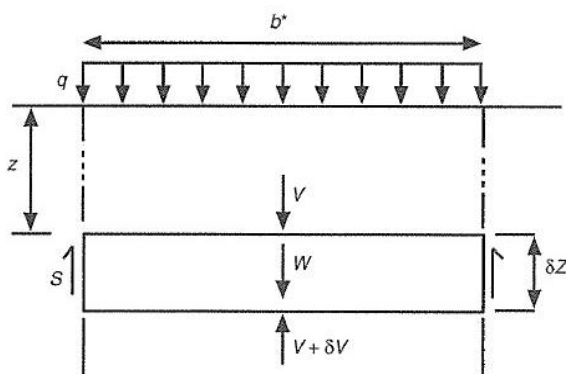
Questo metodo porta a risultati accurati basati sulla compressione uniassiale; nel 1925 Terzaghi sviluppò ulteriormente la teoria di consolidazione appena descritta. L'analisi che segue si basa sull'analisi delle tensioni di Marston per la superficie di carico. Vengono anche utilizzate le ipotesi della compressione uniassiale di Terzaghi ma associate alla distribuzione delle tensioni con la profondità dell'approccio di Marston piuttosto che alla classica teoria elastica. Il metodo Marston-Terzaghi (MT) si basa sulle seguenti ipotesi:

- a) La tensione verticale aggiuntiva dovuta al posizionamento del carico in superficie decresce con la profondità;
- b) Ad ogni determinata profondità, le tensioni e le deformazioni verticali sono uniformi lungo la verticale al di sotto del carico;
- c) La soluzione del problema è legata strettamente alla compressione unidimensionale del terreno appena sotto all'area caricata.

Anche in questo caso, le ipotesi sono alquanto limitative: l'analisi non è applicabile, per esempio, ad una situazione nella quale il valore di  $n$  è vicino a quello al quale la capacità portante del terreno sotto carico viene raggiunta, visto che a questo punto il modello di determinazione potrebbe essere radicalmente differente da quello assunto nell'analisi. Nel caso in esame, non c'è presenza di falda all'interno del terreno sollecitato e nemmeno un'eccessiva pressione dei pori dovuta al carico: ne consegue che la tensione totale corrisponde a quella effettiva. Tuttavia, l'analisi può essere applicata anche in presenza di falda usando un peso specifico saturo. La fig. 3.4 mostra uno strato di terreno di spessore  $\delta z$  soggetto a forze verticali  $V$  e  $V + \delta V$ , di peso  $W$  e di sforzo di taglio  $S$ . Lo strato di terreno in esame si trova alla profondità  $z$  al di sotto di un carico uniforme di intensità  $q$  agente su un'area  $a$  con perimetro di lunghezza  $p$ .

Dall'equilibrio verticale si ricava:

$$V + W = V + \delta V + S$$



dove:

$$V = \sigma_v a$$

$$V + \delta V = (\sigma_v + \delta \sigma_v) a$$

$$W = \gamma a \delta z$$

$$S = \tau p \delta z$$

Fig.3.4 – Elemento di terreno alla profondità  $z$  al di sotto di una superficie caricata

Usando l'approccio di Marston, lo sforzo di taglio  $\tau$  fa riferimento alla tensione effettiva verticale  $\sigma_v$  come segue:  $\tau = \mu K \sigma_v$

dove  $K$  è il rapporto tra la tensione effettiva orizzontale e verticale ( $K \approx 1 - \sin \phi'$ ) e  $\mu$  è il coefficiente di attrito della superficie di slittamento.

Ipotizzando che la resistenza al taglio  $\tau_f$  corrisponda allo sforzo di taglio ( $\tau = \tau_f$ ) e che sia proporzionale alla tensione effettiva verticale  $K \sigma_v$  in modo tale che  $\tau_f / (K \sigma_v) = \tan \phi'$ , una approssimazione ragionevole è:

$$\mu K = \tan \phi' (1 - \sin \phi') \quad (1)$$

Sostituendo le equazioni nella formula principale dell'equilibrio si ottiene:

$$\frac{\delta \sigma_v}{\delta z} = \gamma - \frac{P}{a} \mu K \sigma_v \quad (2)$$

Le caratteristica della dimensione dell'area caricata  $b^*$  è definita come  $b^* = 4a/p$ ;

per una superficie di forma quadrata di lato di lunghezza $b$	$b^* = b$
per una superficie di forma circolare di diametro $b$	$b^* = b$
per una superficie di forma rettangolare di lunghezza $mb$ :	$b^* = 2mb / (1 + m)$
Per un superficie nastroforme di larghezza $m$	$b^* = 2b$

Dalle equazioni (1) e (2) si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\frac{\delta \sigma_v}{\delta z} = \gamma - \sigma_v \frac{f}{b^*} \quad (3)$$

dove  $f = 4\mu K$ .

Dall'integrazione dell'Eq. (3)

$$\ln \left[ \gamma - \sigma_v \frac{f}{b^*} \right] = - \left[ \frac{zf}{b^*} \right] + C$$

$C$  può essere determinato impostando  $z = 0$  (di conseguenza  $\sigma_v = q$ ), ottenendo

$$C = \ln \left[ \gamma - \frac{qf}{b^*} \right]$$

Perciò

$$\frac{z}{b^*} = \frac{1}{f} \ln \left\{ \frac{1 - [(qf)/(b^*)]}{1 - [(\sigma_v f)/(b^*)]} \right\}$$

Dall'equazione iniziale  $n = q/\gamma b^*$  e quindi  $q = n\gamma b^*$ , la formula precedente può essere quindi espressa come

$$\frac{z}{b^*} = \frac{1}{f} \ln \left\{ \frac{1 - nf}{1 - nf(\sigma_v/q)} \right\} \quad (4)$$

che, riordinata risulta

$$\frac{\sigma_v}{q} = \frac{1}{nf} \left\{ 1 - \left[ (1 - nf) \exp \left( \frac{-zf}{b^*} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

La profondità della zona d'influenza totale  $z_d$  della superficie caricata è la profondità per cui  $\sigma_v = \gamma z$ , cioè la profondità alla quale la tensione supplementare  $\sigma_v - \gamma z$  dovuta al carico risulta nulla. Dall'equazione (4),  $z_d$  (viene imposto  $\sigma_v = \gamma z$ ) risulta:

$$\frac{z_d}{b^*} = \frac{1}{f} \ln \left[ \frac{1 - nf}{1 - (z_d f / b^*)} \right]$$

Quindi

$$n = \frac{1}{f} \left( 1 - \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{z_d f}{b^*} \right) \right] \exp \left( \frac{z_d f}{b^*} \right) \right\} \right) \quad (6)$$

Partendo dall'equazione (1) per stimare il valore di  $f = 4\mu K$ , si ottiene che

$$\phi' = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad f = 1.15$$

$$\phi' = 35^\circ \quad \Rightarrow \quad f = 1.19$$

Risulta quindi che per  $f$  un intervallo ragionevole di valori sia compreso tra 1.0 e 1.2. La Fig. 3.5 rappresenta la relazione tra  $z_d/b^*$  e  $n$  derivanti dall'Eq.(6) partendo da questi due valori di  $f$ . Per una base di appoggio con  $n=10$ ,  $z_d/b^*$  è circa 2 mentre per un sovraccarico di  $n=0.1$ ,  $z_d/b^*$  è 0.4. La profondità della zona d'influenza ricavata dalla teoria dell'elasticità per un carico uniforme su un'area circolare usando la formula  $(\sigma_v - \gamma z)/q = 0.1$  è 1.8 (questo valore è indipendente da  $n$ ).

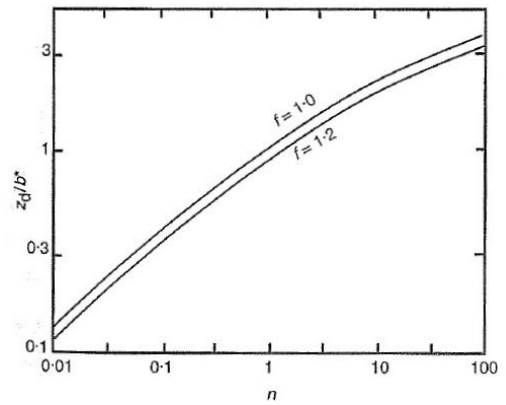


Figura 3.5 – Rapporto della profondità della zona d'influenza  $z_d/b^*$  in funzione del rapporto dell'intensità di carico  $n$ .

In Fig. 3.6, il rapporto dell'incremento della tensione verticale  $(\sigma_v - \gamma z)/q$ , come calcolato nell'Eq.(5), viene confrontato con  $z/b^*$  per i tre valori di  $n$ . La distribuzione delle tensioni derivante dalla teoria dell'elasticità per un carico uniforme su un'area circolare su un mezzo elastico è rappresentato in due modi:

- La linea EMX indica la tensione verticale massima che si forma sulla linea centrale dell'area caricata;
- La linea EMN è la tensione verticale media al di sotto della superficie di carico.

Si è notato come ci sia una certa concordanza tra la tensione verticale media derivante dalla teoria dell'elasticità e la distribuzione ricavata dal metodo MT con  $n = 10$  (che è il valore tipico in presenza di piccoli carichi). Ciò non avviene, invece, quando  $n = 0.1$ , situazione tipica di carichi maggiori. Quando  $z=z_d$  non sono presenti, per definizione, tensioni aggiuntive dovute al posizionamento del carico e di conseguenza non possono esserci deformazioni.

Il metodo Marston-Terzaghi è stato usato anche come strumento di previsione delle deformazioni dovuti alla superficie di carico. Se si ipotizza che la tensione verticale effettiva  $\sigma_v$  e la deformazione verticale  $\varepsilon_v$  siano linearmente collegate da un modulo costante  $D$ , l'analisi ottiene risultati che possono essere comparati con quelli conseguiti con la teoria dell'elasticità. Partendo dall'Eq.(5), si arriva ad un'espressione per l'aumento della tensione  $(\sigma_v - \gamma z)$  dovuta all'applicazione del carico in superficie. La deformazione verticale  $\varepsilon_v$  prodotta dal carico è semplicemente  $(\sigma_v - \gamma z)/D$ . Il cedimento in superficie si ottiene integrando l'espressione per  $\varepsilon_v$  tra  $z = 0$  e  $z = z_d$  (viene tralasciata la dimostrazione:

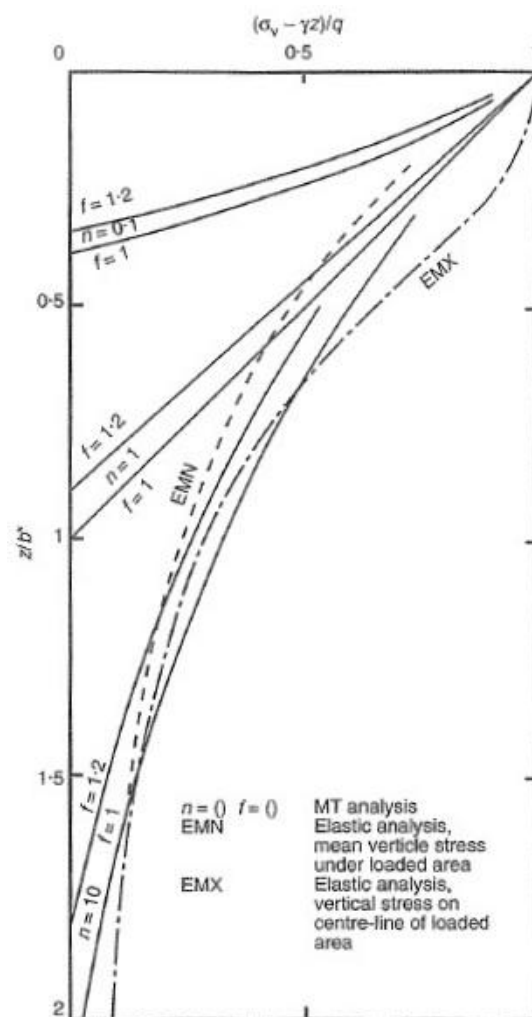


Fig. 3.6 – Variazione del rapporto dell'incremento della tensione verticale  $(\sigma_v - \gamma z)/q$  con la profondità per valori differenti di  $n$



$$\frac{sD}{qb^*} = \frac{1}{f} \left( 1 - \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{z_d f}{b^*} \right) \right] \exp \left( \frac{z_d f}{b^*} \right) \right\} \right) \quad (7)$$

L'Eq.(7) relaziona  $(SD)/(qb^*)$  a  $z_d/b^*$ ; la relazione tra  $n$  e  $(z_d f)/b^*$  è data nell'Eq.(6). Usando le equazioni (6) e (7), il rapporto  $sD/qb^*$  può essere calcolato come funzione di  $n$ .

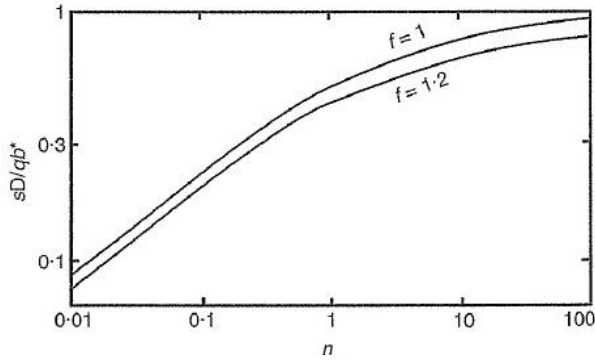


Figura 3.7 – Relazione tra  $(SD)/(qb^*)$  e il rapporto dell'intensità di carico

Questa legame è rappresentato in Fig. 3.7: per valori molto alti di  $n$ ,  $sD/qb^*$  viene approssimato a  $1/f$  (ovvero 1 quando  $f = 1$  e 0.83 quando  $f = 1.2$ ). Questi risultati possono essere comparati con valori derivanti dalla teoria dell'elasticità per le superfici di carico dove il rapporto  $(SD)/(qb^*)$  dipende dalla forma e dalla rigidità della base d'appoggio e dal modulo di Poisson  $\nu$  del terreno ma è assolutamente indipendente dal valore di  $n$ .

La figura suggerisce che nonostante 0.75 sia un valore medio ragionevole nell'intervallo dei suoi valori di maggiore interesse pratico, è effettivamente una funzione di  $n$ ; prendendo i valori limite, con  $n=100$ ,  $s/q$  è approssimativamente proporzionale a  $b^*$  e con  $n=0.01$ ,  $s/q$  è all'incirca proporzionale a  $(b^*)^{0.5}$ .

Con l'aumentare del carico, la Fig. 3.7 dimostra che la relazione tra  $s$  e  $q$  diviene non-lineare, anche quando il modulo  $D$  rimane costante. Questo succede a causa del fatto che più aumenta la profondità della zona d'influenza, più  $q$  aumenta, e di conseguenza anche  $n$ . E' stato dimostrato da numerosi prove e studi, sia in sito che in laboratorio, che questo comportamento non-lineare viene raggiunto anche in casi di sforzi molto piccoli. Per la sua semplicità e convenienza, l'analisi lineare continua a svolgere un ruolo importantissimo su problemi riguardanti deformazioni e interazioni tra terreno e struttura, ma se non viene considerata anche la natura non lineare del terreno, lo studio dell'interazione, l'interpretazione delle misure in sito e i risultati delle analisi possono risultare scorretti.



## Capitolo 4: Influenza del comportamento non lineare del terreno nelle interazioni terreno-struttura

Le analisi di interazione terreno-struttura comportano la determinazione di deformazioni e tensioni, sia nella massa di terreno circostante l'area caricata sia nelle zone a contatto con la sua superficie. Negli ultimi anni è stato possibile il calcolo di soluzioni anche in caso di proprietà del suolo particolarmente complesse. Lo studio del comportamento non lineare negli studi ingegneristici, tuttavia, è limitato a causa dei tempi, dei costi e delle difficoltà per ottenere dati di tensione-deformazione di alta qualità. C'è quindi una necessità di maggiore sensibilità usando dei modelli di terreno avanzati per indagare sulle varie caratteristiche del comportamento del terreno (come la non linearità presente anche in caso di piccole deformazioni e di collassi locali). I tipi di analisi più comuni rimangono le teorie basate sul comportamento elastico-lineare; in questo caso, lo studio si basa sulla determinazione degli appropriati moduli elastici del sito ( $E_u$ ,  $E'$ ,  $G$ ,  $K$  etc..) e sulla loro variazione con la profondità. Tuttavia è stato provato che le misure di questi parametri elastici possono essere imprecise, soprattutto nei risultati di test di laboratorio convenzionali in cui spesso i valori ottenuti non corrispondono alle misurazioni fatte in sito. Si sono iniziate quindi a sviluppare nuove tecniche di laboratorio per conseguire dati più accurati delle tensioni locali nei campioni di terreno. I risultati ottenuti con queste tecniche mettevano in dubbio la validità delle assunzioni dell'andamento linearmente elastico in caso di sollecitazione del terreno. Questi test provavano che il comportamento tensione-deformazione dei terreni erano molto più rigido rispetto alle misurazioni di tensioni convenzionali, e che le sue caratteristiche non drenate erano di natura non lineare per una grande casistica di suoli.

Nel 1985, Jardine et al. effettuarono un'ampia serie di prove triassiali su diversi terreni usando nuove tecniche di misura delle tensioni; questo perché precedentemente avevano dimostrato che i metodi convenzionali per la determinazione di deformazioni assiali da test triassiali potevano portare ad errori non trascurabili. Le prove su sabbie e argille di bassa e media plasticità hanno mostrato una rigidità iniziale molto alta, un andamento di tensione-deformazione non lineare ed entrambi questi fattori dipendevano dal tipo di terreno, dalla storia morfologica e tensionale. La Fig. 4.1 rappresenta queste caratteristiche per un'argilla ricostituita a bassa plasticità in condizioni non drenate che è stata consolidata a vari rapporti di sovraconsolidazione. Gli stessi dati vengono raffigurati in Fig. 4.2 ma in scala logaritmica per mostrare in dettaglio la prima fase di carico.

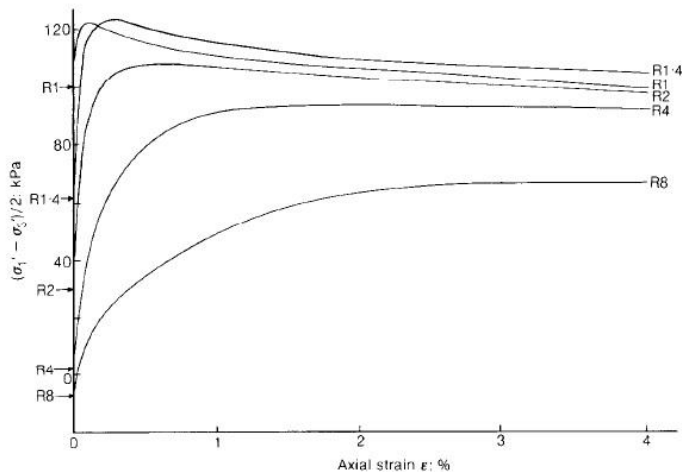


Fig.4.1 – Grafico della tensione-deformazione di un'argilla a bassa plasticità misurate in condizioni non drenate e consolidata a vari rapporti di sovraconsolidazione come indicato.  
(in scala aritmetica)

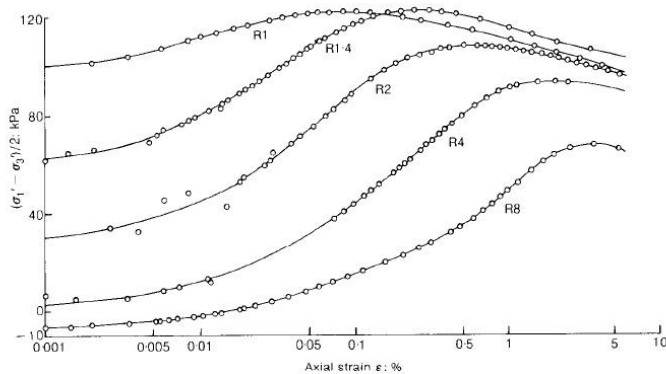


Fig.4.2 – Stesso grafico della Fig.4.1 , in scala logaritmica.

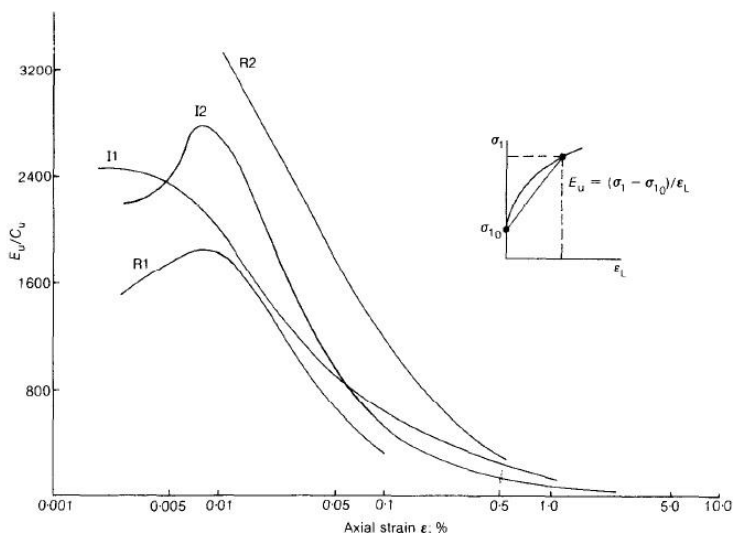


Figura 4.3 – Curve rigidezza-deformazione di un'argilla a bassa plasticità: R1 e R2 ricostituita partendo dalla condizione  $K_0$ ; I1 e I2 per un'argilla inalterata leggermente sovraconsolidata sita ad una profondità di 67.2m al di sotto del livello del mare.

In Fig.4.3 sono rappresentati i risultati dei due test R1 e R2 confrontando i valori di  $E_u/C_u$  in rapporto alla deformazione (in scala logaritmica), dove  $E_u$  indica il modulo di Young secante non drenato. Sono inoltre presenti i risultati delle analisi su due campioni leggermente sovraconsolidati dello stesso terreno (I1 e I2). Il campione I1 è stato testato allo stato non consolidato mentre l'I2 era stato portato allo stesso stato di consolidazione che aveva in sito, con  $K_0=0.52$ .

Affinché i valori delle relazioni tensioni-deformazioni possano essere analizzati in base a specifici problemi al contorno, è necessario trovare un'espressione matematica semplice e adeguata ai dati in possesso. L'esempio riportato da Jardine et al. si basa sui seguenti dati:

Test	A	B	C (%)	$\alpha$	$\beta$	$\varepsilon_{A,MIN}$ (%)	$\varepsilon_{A,MAX}$ (%)
R1	850	1000	0.008	2.023	0.5943	0.005	0.20
R2	3100	3200	0.0007	1.349	0.6385	0.003	0.20
I2	1420	1380	0.009	2.098	0.5050	0.0045	1.5

La forma generale che esprime la relazione tra il modulo di Young secante  $E_u$  e il logaritmo della deformazione assiale prima della rottura può essere convenientemente rappresentata dalla seguente funzione logaritmica periodica (si veda Fig.4.4):

$$\frac{E_u}{C_u} = A + B \cos \left\{ \alpha \left[ \log_{10} \left( \frac{\varepsilon_a}{C} \right) \right]^\gamma \right\} \quad (1)$$

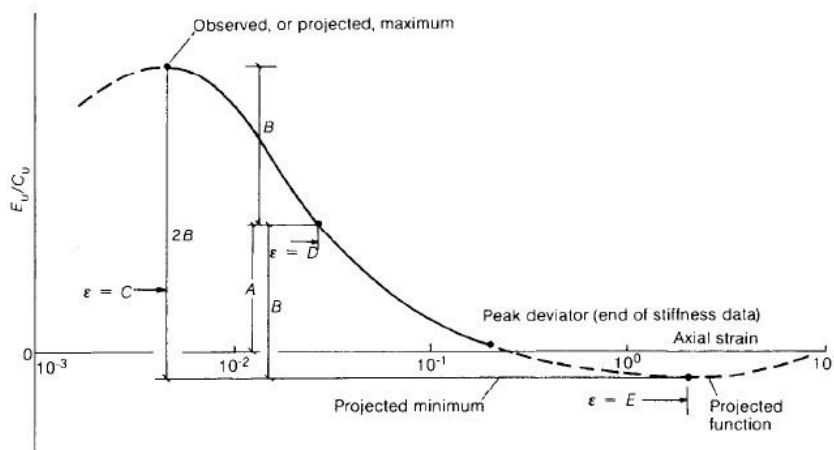


Fig. 4.4 – Curva interpolante i dati di rigidezza-deformazione

A, B, C,  $\alpha$  e  $\gamma$  sono delle costanti empiriche che si determinano in base ai dati delle prove (si tralascia la dimostrazione):

$$\gamma = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \left[ \log_{10} \left( \frac{E}{C} \right) / \log_{10} (D/C) \right]}$$

$$\alpha = \frac{\pi/2}{[\log_{10} (D/C)]^\gamma}$$

A e B possono essere presi direttamente dai valori di rigidità che corrispondono alle deformazioni C, D e E.

L'Eq.1 dovrebbe essere stimata per una serie di punti in modo da trovare il grado di divergenza attraverso i dati dei test in prossimità dei limiti inferiori e superiori della deformazione. I limiti dovrebbero essere scelti per prevenire rigidità con tangenti negative, e il limite inferiore non dovrebbe essere minore dello 0.001%. I punti di massimo, minimo e di intersezione possono essere scelti nuovamente se la curva non rispecchia l'andamento dei dati.

All'Eq.1 può essere attribuito solo un intervallo di valori di deformazione. Quando questi sono al di sotto del limite inferiore  $\epsilon_{\min}$  o al di sopra di quello superiore  $\epsilon_{\max}$ , viene assunta una tangente delle rigidità prefissata. Oltre a questo intervallo "elastico", viene indicato un rapporto di Poisson di 0.49 e, in caso di modellazione, devono essere seguite linee di diverso criterio. Bisogna fare particolare attenzione alla compatibilità tra il limite  $\epsilon_{\max}$  e l'inizio della fase plastica.

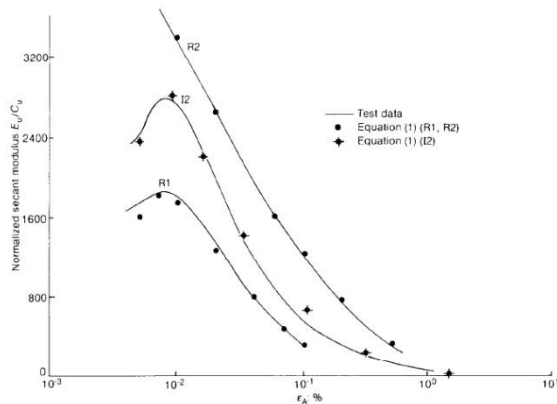


Figura 4.5 – Curve derivanti dalle prove su R1, R2 e I2

Continuando con l'esempio proposto da Jardine et al., la Fig.4.5 dimostra come i valori dei dati derivanti dai test corrispondano a quelli trovati attraverso l'Eq.1, nel caso di un'argilla a bassa plasticità (i valori delle costanti sono nella tabella della pagina precedente).

La maggior parte delle procedure numeriche fanno uso di un modulo tangente  $E_{ut}$  piuttosto che del classico modulo secante.

L'equazione 1 diventa quindi:

$$\frac{E_{ut}}{C_u} = A + B \cos(\alpha I^\gamma) - \frac{B \alpha \gamma I^{\gamma-1}}{2 \cdot 303} \sin(\alpha I^\gamma) \quad (2)$$

dove  $I = \log_{10}(\epsilon_a/C)$ .

L'Eq.2 può essere generalizzata sostituendo la deformazione deviatorica invariante:

$$E = \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2]^{0.5}$$

Quest'ultima equazione permette all'Eq.2 di essere inclusa nei programmi informatici di elementi finiti non lineari.

Per l'analisi appena esaminata, la formulazione empirica è stata associata ad un materiale perfettamente plastico, non indurente, che si basa sul criterio di Tresca; quest'ultimo è un criterio di resistenza relativo a materiali duttili (è quindi un criterio di snervamento), isotropi, con uguale resistenza a trazione e a compressione, e snervamento indipendente dalla pressione idrostatica. Questo modello, che rappresenta un'argilla a bassa plasticità con un rapporto di sovraconsolidazione pari a 2, viene chiamato LPC2.

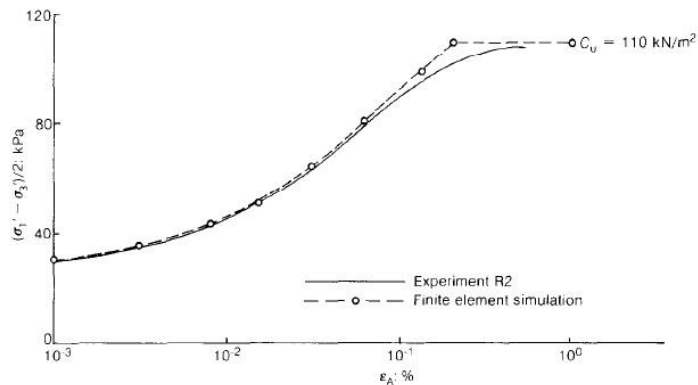


Figura 4.6 – Confronto tra la curva sperimentale e quella derivante dalla simulazione tramite FEM per i test su R2.

In Fig. 4.6 vengono confrontati i dati ottenuti dalle prove su un terreno R2 e la simulazione attraverso il metodo degli elementi finiti usando il materiale LPC2: le due curve corrispondono perfettamente.

## 4.1 - Esempio

Si consideri un carico rigido circolare che può rappresentare, per esempio, una fondazione per la quale sia richiesta la determinazione delle deformazioni nel volume del terreno circostante. La Fig. 4.7 mostra una piastra liscia rigida circolare di diametro  $D$  che appoggia su uno strato uniforme di argilla di spessore  $5D$  al di sopra di un piano rigido. La piastra esercita una pressione di  $3C_u$ , dove  $C_u$  è la resistenza al taglio limite dell'argilla in condizioni non drenate. Il fattore di carico sulla capacità portante è approssimativamente 0.5. Per quanto riguarda le proprietà del terreno, invece, si assume che lo strato argilloso abbia la stessa storia tensionale e lo stesso andamento di tensione e deformazione del terreno R2 visto nelle pagine precedenti. Nel caso in esame, le variazioni nelle tensioni totali  $\sigma_v$  e  $\sigma_r$  al di sotto del centro della piastra possono essere ottenute dalle medie dell'elasticità lineare;  $(\sigma_v - \sigma_r)/2$  può essere calcolato ad ogni rapporto  $Z/D$ , e il valore della tensione verticale corrispondente è ottenuto dalla Fig. 4.6.

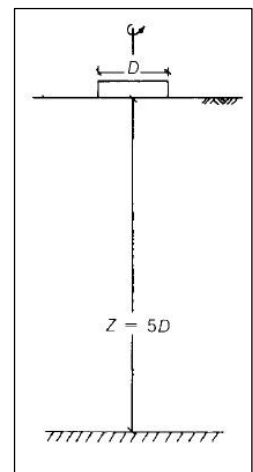


Figura 4.7 – Piastra circolare di diametro  $D$  che poggia su uno strato argilloso

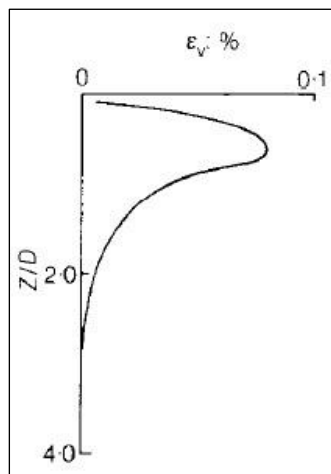


Figura 4.8

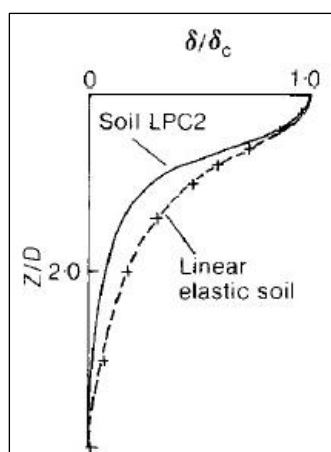


Figura 4.9

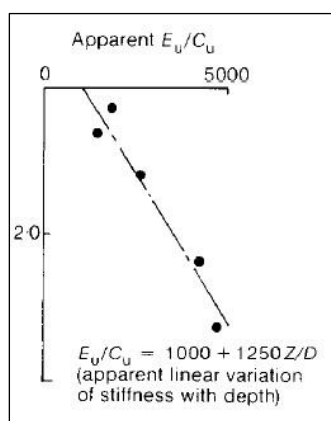


Figura 4.10

In Fig. 4.8 è rappresentata la distribuzione delle tensioni verticali ottenuta nel modo sopra spiegato. Si noti che le deformazioni al di sotto del centro della piastra sono sempre minori del 0.1%; perciò, nonostante il fattore di carico sia 0.5, la risposta del suolo è determinata dalle sue più limitate proprietà di compressione. Per questo motivo, le prove in laboratorio finalizzate alla determinazione delle proprietà della rigidezza del terreno, richiedono misurazioni precise delle deformazioni con la precisione dello 0.01%.

In Fig. 4.9 sono rappresentate le curve degli spostamenti normalizzati  $\delta/\delta_c$  alle varie profondità: una curva rappresenta l'analisi svolta su un suolo omogeneo con andamento linearmente elastico, l'altra sul modello LPC2. E' evidente che quest'ultima si riduce con la profondità molto più rapidamente rispetto ad un materiale omogeneo linearmente elastico.

La Fig. 4.10 mostra la variazione del modulo secante  $E_u/C_u$  con la profondità che corrisponde alla distribuzione delle deformazioni della figura 4.8. I risultati mostrano che, partendo da una serie di misurazioni degli spostamenti eseguite in sito a diverse profondità, un'interpretazione linearmente elastica della curva potrebbe indicare un incremento della rigidità con la profondità. Questa conclusione è stata confermata da numerose prove in sito. Bisogna però fare attenzione nel dare per scontato che generalmente la rigidezza aumenti con la profondità (piuttosto che considerare le proprietà della rigidezza con riferimento alle piccole deformazioni che portano ad andamenti non lineari), in quanto non sempre è valido e può quindi portare a risultati scorretti; di conseguenza, nelle problematiche pratiche è consigliato tenere presente entrambi gli effetti.



## **Capitolo 5: Analisi dell' interazione terreno-struttura nella progettazione di serbatoi circolari**

### **5.1 - Modellazione numerica del comportamento di fondazioni superficiali su cui agisce un carico verticale distribuito**

---

Nel presente lavoro si esamina il problema di una piastra circolare in calcestruzzo (fondazione superficiale di un serbatoio), soggetta ad un sistema di carichi verticali di tipo simmetrico e poggiante su un suolo reale, con una stratigrafia precisa. La struttura è stata analizzata attraverso i differenti modelli precedentemente descritti, in modo da capire e confrontare i vari comportamenti e i conseguenti risultati. Viene data una particolare attenzione al modello di Winkler, dal momento che, in fase progettuale, è la semplificazione più utilizzata nella pratica usuale; avendo dimostrato quanto questo sia un metodo limitato, si vuole capire se il più recente modello Modified Kerr-Reissner (MK-R) proposto da J. S. Horvath può eventualmente sostituirlo con risultati più vicini ad un probabile comportamento del terreno.

Il lavoro si svolge su due livelli distinti: da una parte si analizza il caso reale di un serbatoio appoggiato su un terreno di stratigrafia precisa; dall'altra, invece, si studia il caso parametrico in cui in fase di modellazione vengono ipotizzati una serie di valori dei parametri riferiti al volume significativo del terreno in esame.

Per le analisi lineari e quindi di natura elastica (reversibile, qualora il carico venga rimosso), è stato utilizzato il programma "Straus 7", un software per il calcolo strutturale ad elementi finiti in ambito statico e dinamico (riferimento Allegato A). Le analisi non lineari in campo elasto-plastico (irreversibili), invece, sono state sviluppate in "Plaxis 2D", altro programma di calcolo ad elementi finiti usato per analisi bidimensionali di deformazioni e di stabilità largamente utilizzato in campo geotecnico.

### 5.1.1 - La struttura

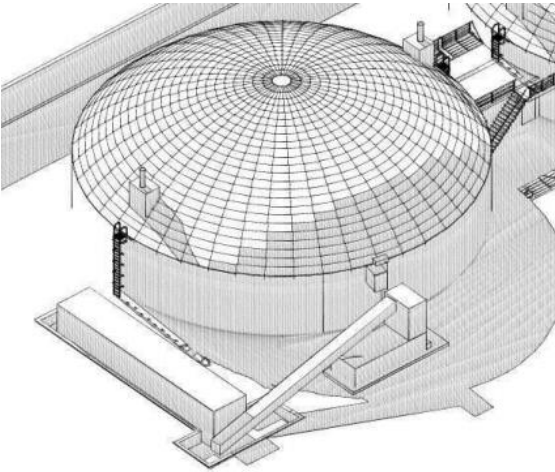


Figura 5.1 - Rappresentazione di un serbatoio in calcestruzzo in un impianto di Biogas

L'interpretazione teorica dei risultati di misure di opere di fondazione non è sempre agevole, a causa delle difficoltà di tener conto con il calcolo di tutti i numerosi parametri che influenzano il problema e che, caso per caso, assumono importanza e significato diversi. Alcuni di questi parametri caratterizzano il tipo di opera e le relative fondazioni; altre si introducono per specificare la natura e definire le caratteristiche meccaniche dei terreni. Per questo

lavoro si osservano gli effetti delle fondazioni di un serbatoio circolare in calcestruzzo, struttura che oggi

viene, per esempio, frequentemente utilizzata negli impianti di Biogas (chiamati anche “fermentatori”, Fig.5.1). Questi grandi contenitori vengono costruiti in cemento armato monolitico gettato in opera come anche la platea di fondazione e la soletta calpestabile. Nell'analisi che segue sono stati confrontati i risultati ottenuti da una vasca di diametro maggiore di 32 metri con una inferiore di diametro 12 metri; per semplicità di calcolo, si ipotizza che le vasche in questione contengano semplicemente acqua. I serbatoi poggiano su fondazioni dirette in calcestruzzo armato, su cui grava il peso proprio della struttura e la pressione trasmessa dall'acqua contenuta. La modellazione del serbatoio in “Straus 7” è rappresentata in fig. 5.2.

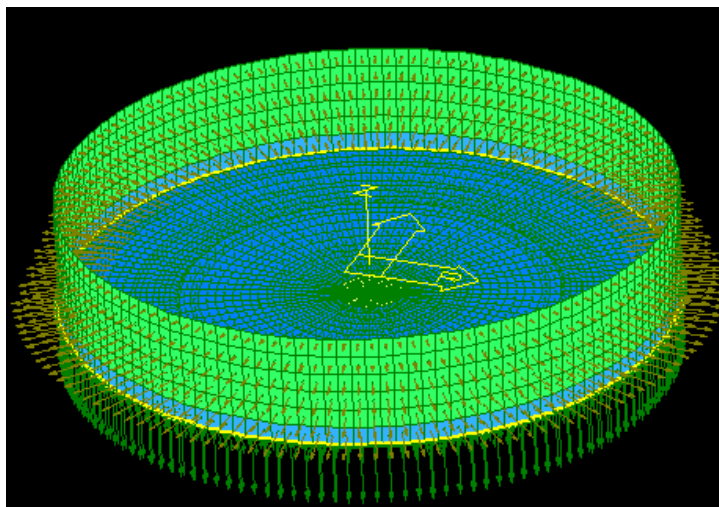


Fig. 5.2 – Modellazione del silo di raggio 16 m in Straus 7, in caso di serbatoio pieno d'acqua. Si è adottato un sistema di riferimento cilindrico di coordinate  $(R, \theta, Z)$ .

La fondazione superficiale del serbatoio è una soletta in calcestruzzo spessa 30 cm, il muro esterno ha altezza 6 m ed è spesso 28 cm.

Le condizioni di carico adottate nei calcoli sono le seguenti:

- Pressione uniformemente ripartita agente su tutta la piastra dovuta al carico idrostatico in caso di serbatoio colmo d'acqua;
- Carico lineare agente lungo i bordi della fondazione superficiale dovuto al muro perimetrale (presente in ogni caso).

### 5.1.2 - Il terreno

La ricostruzione del modello fisico del terreno consiste nella suddivisione dell'ammasso di terreno interessato dall'intervento (volume significativo) in unità a comportamento meccanico omogeneo e nell'attribuzione ad ognuna di esse dei parametri geotecnici necessari per l'analisi delle interazioni tra l'opera di progetto e il terreno stesso. La scelta dei parametri e la stessa distinzione in unità dipendono dalle condizioni geotecniche locali. Prove in sito continue, quali ad esempio le prove

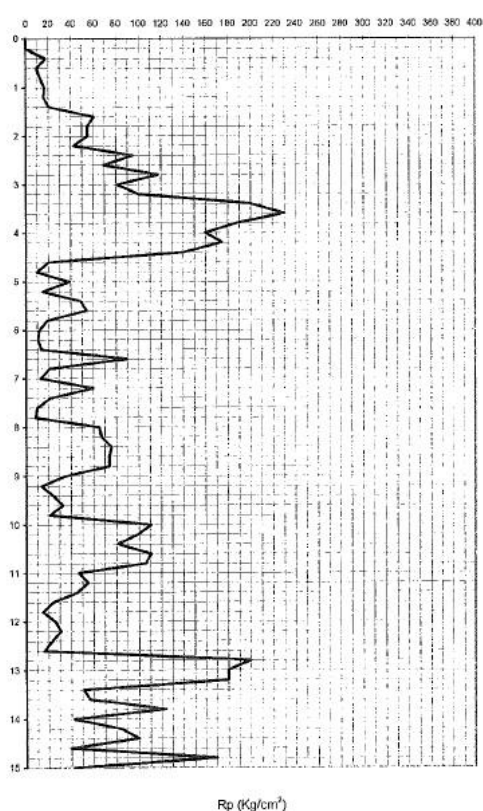


Figura 5.3 - Prova penetrometrica CPT, Resistenza alla punta

penetrometriche statiche con misure alla resistenza alla punta e di attrito laterale locale, forniscono informazioni qualitative sulla granulometria del terreno e sulla consistenza dello stesso consentendo attraverso i profili di resistenza la separazione del terreno in unità geotecniche. Si considera per questo studio un terreno costituito da una serie di limi argillosi e sabbiosi per uno spessore complessivo di 15 metri soprastante uno strato di sabbia. La resistenza alla penetrazione è illustrata nella figura 5.3 attraverso misure di resistenza alla punta ottenuta da penetrometro statico CPT (la relazione geologica di riferimento è consultabile nell'allegato B). Dai dati di resistenza penetrometrica è possibile distinguere il terreno secondo le unità indicate in Tabella 5.1, dove vengono inoltre inseriti i valori ipotizzati del modulo elastico  $E$  e del coefficiente di Poisson per ogni strato.

PROFONDITA'	TIPO TERRENO	E (kPa)	$\nu$	Strato (m)
Da 1,5m a 3m	Limo sabbioso/argilla	8000	0,2	1,5
Da 3m a 4,5m	Sabbia	20000	0,2	1,5
Da 4,5m a 8m	Limi sabbiosi/argilla organica	8000	0,2	3,5
Da 8m a 10m	Sabbie limose	14000	0,2	2
Da 10m a 12m	Limo sabbioso	8000	0,2	2
Da 12m a 15m	Sabbia/limi sabbiosi	12000	0,2	3

Tabella 5.1 – Stratigrafia idealizzata del terreno in esame.

Nel modello tridimensionale realizzato con “Straus 7”, la modellazione della stratigrafia semplificata del terreno è rappresentata come in Fig. 5.4.

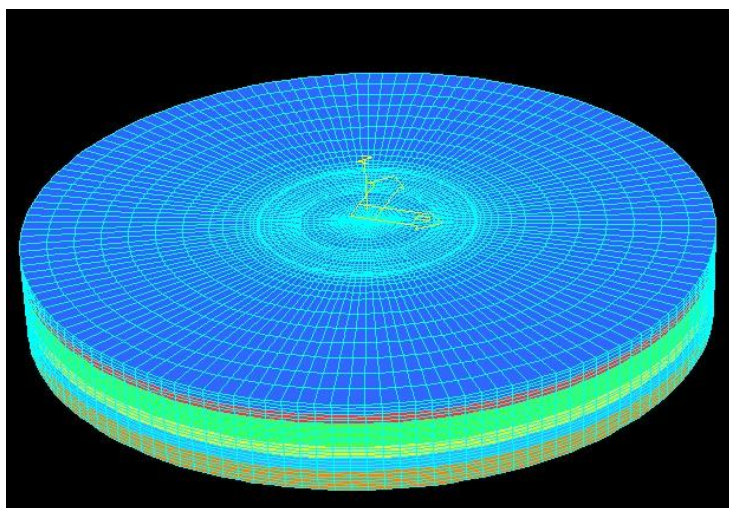


Fig. 5.4 – Modellazione del volume significativo di terreno in Straus 7 e rappresentazione della mesh adottata.

## 5.2 - Le analisi

Come è già stato anticipato, le analisi svolte sono state sia di tipo lineare, che di tipo non lineare. Il modello tridimensionale, il modello di Winkler e quello di “Kerr-Reissner modificato” proposto da J. S. Horvath sono stati modellati con il programma “Straus 7” lavorando in campo lineare elastico; con l’aiuto di Plaxis 2D, invece, si è studiato il campo non lineare elasto-plastico attraverso le analisi HS, HSS e di Mohr-Coulomb. In seguito vengono descritte più dettagliatamente tali analisi.

Analisi LINEARI (Straus 7)	Modello tridimensionale
	Modello di Winkler
	Modello MK-R modificato
Analisi NON LINEARI (Plaxis 2D)	Modello Mohr-Coulomb
	Modello Hardening Soil
	Modello Hardening Soil with small strains

### 5.2.1 - ANALISI LINEARI

#### 5.2.1.1 - Analisi lineare del modello tridimensionale

I risultati di quest’analisi sono stati presi come riferimento per il campo lineare. Nello specifico, il terreno è stato modellato con una serie di elementi brick, assegnando loro il valore del modulo di elasticità  $E$  e del coefficiente di Poisson corrispondenti alla stratigrafia in esame (Fig. 5.5). Attraverso questa analisi lineare, la deformazione degli elementi brick avviene limitatamente in campo elastico.

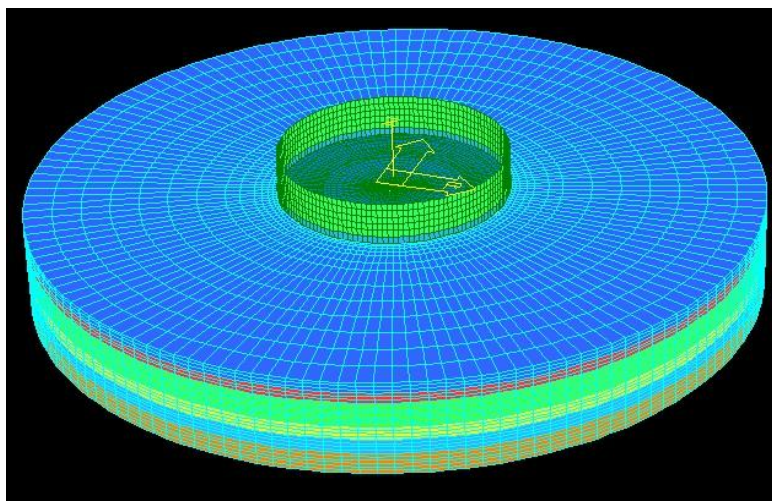


Fig. 5.5 – Modellazione in 3D eseguita con Straus 7 (serbatoio di raggio 16m)



### 5.2.1.2 - Analisi lineare con il modello di Winkler

La modellazione, in questo caso, è limitata alla piastra della struttura e il comportamento del terreno viene introdotto attraverso il comando “Face Support” assegnando il valore del coefficiente di resistenza del terreno  $k$  (nelle prossime pagine, i risultati di questo modello fanno riferimento ad un  $k$  scelto in modo tale da ottenere una corrispondenza con i valori dei cedimenti del modello tridimensionale). Dai dati ottenuti si vedrà come il problema di tale modello non è limitato alla scelta del valore di  $k$ , ma comprende anche effetti che si discostano dal più probabile comportamento della fondazione superficiale.

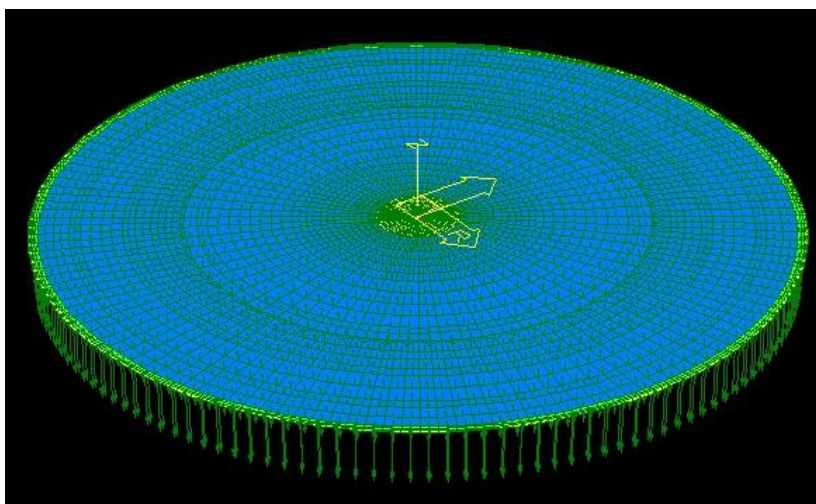


Figura 5.6 – Modello di Winkler eseguito con Straus 7 (serbatoio di raggio 16m)

### 5.2.1.3 - Analisi lineare con il modello MK-R di Horvath

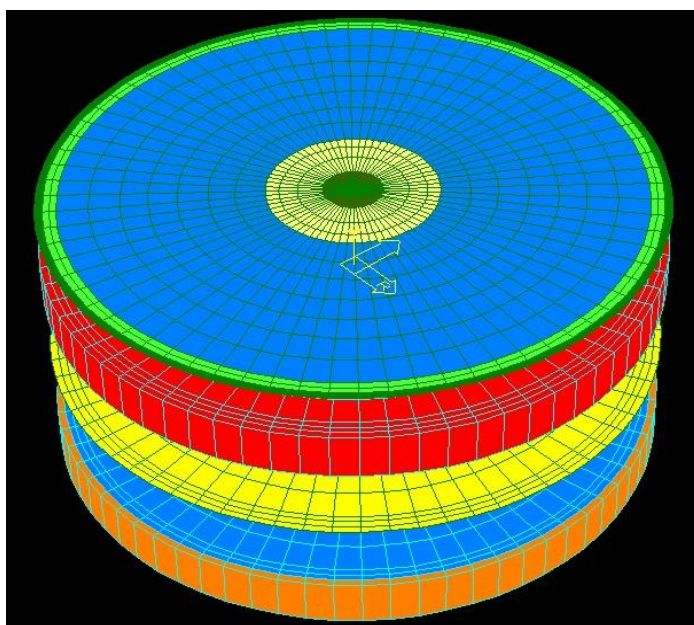


Fig. 5.7 – Modellazione in Straus 7 del modello proposto da Horvath (piastra di raggio interno di 6m). I vari strati sono stati appositamente distanziati per mostrare la loro sequenza.

La piastra superiore azzurra corrisponde alla soletta in calcestruzzo del serbatoio (i bordi verdi segnano la superficie in cui appoggia il muro); gli elementi brick rossi rappresentano lo strato di molle di rigidezza  $k_h$ .

La superficie gialla raffigura la membrana sollecitata a trazione e lo strato azzurro inferiore corrisponde allo strato di molle di rigidezza  $k_i$ ; gli elementi brick inferiori perimetrali di colore arancio rappresentano le molle speciali di bordo di rigidezza  $k_{bc}$ .

Come spiegato nel capitolo 2.2.4, per trovare le varie rigidezze delle molle è necessario partire da un valore unico di  $E$ , significativo per la stratigrafia del terreno in esame. Si è optato per un valore di partenza di  $E$  di 13000 kPa (valore leggermente superiore alla media ponderata dei vari moduli di elasticità ipotizzati per la stratigrafia). Altro parametro molto importante che influenza in maniera significativa i risultati del modello MK-R modificato è la profondità della zona d'influenza  $H$ . I risultati dei modelli di Horvath che verranno presentati nelle prossime pagine e che verranno confrontati con gli altri modelli faranno riferimento ad una profondità d'influenza determinata in modo che i cedimenti della zona centrale della piastra coincidano con quelli ottenuti tramite il modello tridimensionale. Questo perché la soluzione sulle zone di profondità proposta da J. A. Charles (capitolo 3.2) fornisce valori di  $H$  con conseguenti risultati non equivalenti a quelli forniti dalle altre analisi lineari; si discuterà in seguito la scelta dei valori utilizzati con i relativi risultati.

## 5.2.2 - ANALISI NON LINEARI

Per lo studio del comportamento della piastra in campo non lineare sono state eseguite analisi numeriche agli elementi finiti mediante il codice Plaxis 2D.

Per descrivere il comportamento del terreno sono state adottate tre leggi costitutive di complessità crescente:

1. Modello elastico-perfettamente plastico con criterio di rottura Mohr-Coulomb;
2. Comportamento con incrudimento isotropo e modulo di rigidezza in fase di scarico (modello Hardening Soil "HS");
3. Incrudimento isotropo e dipendenza della rigidezza dall'entità delle deformazioni di taglio (modello Hardening Soil with small strains "HSS").

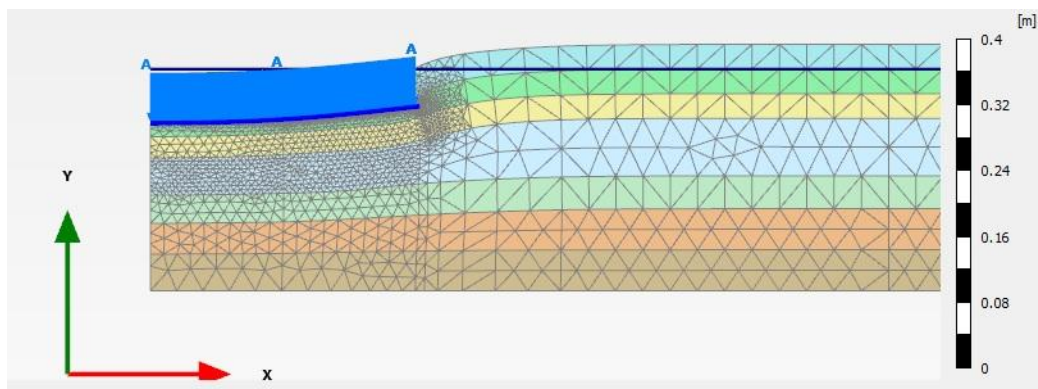


Fig. 5.8 – Immagine del file di output della piastra di Plaxis 2D (Analisi HS)

In questo caso è visibile il cedimento nel caso di serbatoio pieno d'acqua e la mesh creata per il terreno.

## 5.3 - Risultati

### 5.3.1 - serbatoio di raggio 16m

Si presentano i risultati delle varie analisi per la piastra di diametro maggiore (32m). I dati di maggior importanza sono i cedimenti e i momenti flettenti radiali che si creano nella soletta di fondazione in base ai carichi applicati. I due casi di carico analizzati sono:

1. serbatoio pieno d'acqua (più gravoso);
2. serbatoio vuoto (agente solo il peso del muro perimetrale).

Risultati dei cedimenti a serbatoio pieno:

	Modello 3D	Modello di Winkler (k=800 kPa/m)	Modello di Horvath (H=15m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
<b>SERBATOIO PIENO</b>						
Distanza dal centro della piastra (m)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)
0	-7,9	-8	-7,8	-8,05	-8,03	-6,6
1,12	-7,9	-8	-7,8	-8,04	-8,04	-6,58
2,39	-7,9	-8	-7,8	-8,01	-8	-6,56
3,56	-7,8	-8	-7,8	-7,97	-7,96	-6,51
4,15	-7,8	-8	-7,8	-7,94	-7,93	-6,48
5,34	-7,7	-8	-7,8	-7,85	-7,86	-6,4
6,23	-7,6	-8	-7,7	-7,77	-7,79	-6,33
7,12	-7,5	-8	-7,7	-7,69	-7,7	-6,24
8,01	-7,4	-8,1	-7,6	-7,54	-7,6	-6,14
9,35	-7,1	-8,1	-7,5	-7,3	-7,4	-5,96
10,68	-6,8	-8,3	-7,3	-7,01	-7,15	-5,74
11,27	-6,7	-8,3	-7,2	-6,85	-7	-5,63
12,46	-6,3	-8,5	-7	-6,49	-6,74	-5,42
13,35	-5,9	-8,6	-6,8	-6,2	-6,5	-5,22
14,24	-5,6	-8,8	-6,5	-5,88	-6,24	-5,03
15,37	-5,1	-9	-6,1	-5,44	-5,89	-4,78
16	-4,8	-9,2	-5,9	-5,19	-5,71	-4,63
16,43	-4,6	-9,3	-5,8	-5,01	-5,57	-4,54

Tabella 5.2 – Cedimenti (cm) della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi  
Serbatoio PIENO



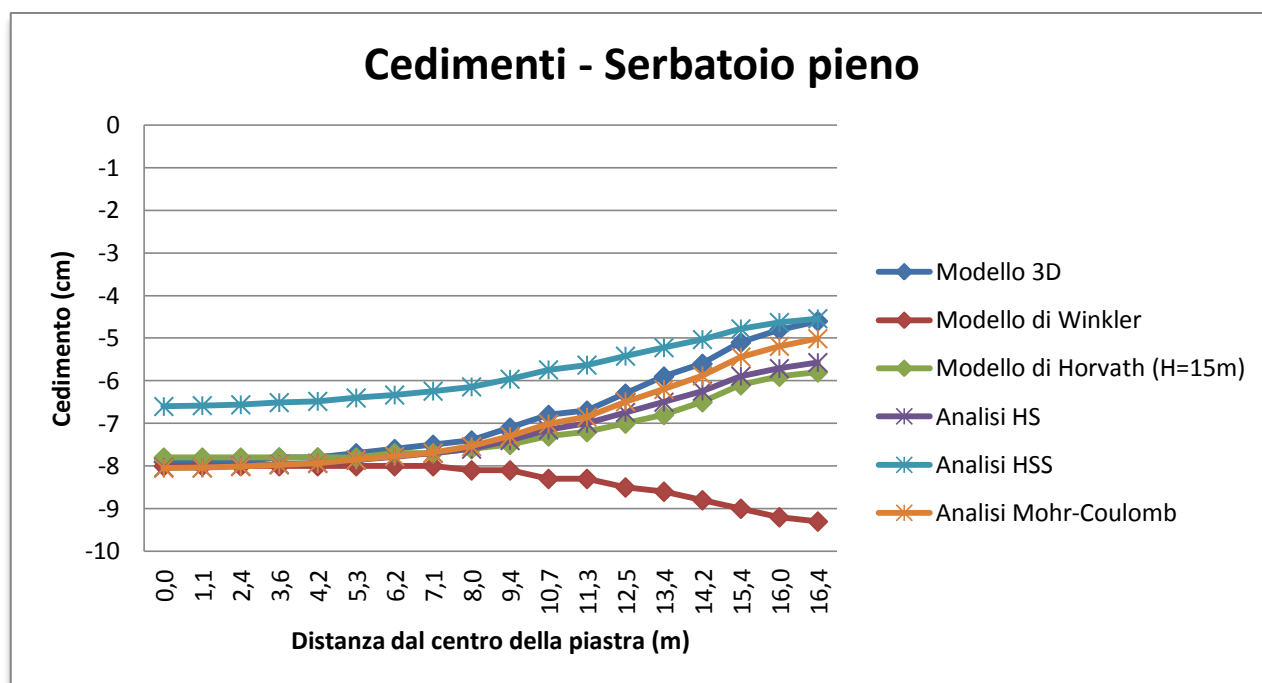


Fig. 5.9 - Grafico dei cedimenti della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi in caso di serbatoio PIENO  
(riferimento alla tabella 5.2)

Nel modello tridimensionale realizzato con Straus 7, è possibile ottenere anche i valori dei cedimenti oltre la piastra (ovvero del terreno circostante la struttura); i risultati sono i seguenti:

Modello 3D					
Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)
0	-7,9	9,35	-7,1	16,9	-3,4
1,12	-7,9	10,68	-6,8	17,5	-2,8
2,39	-7,9	11,27	-6,7	18,5	-2
3,56	-7,8	12,46	-6,3	19,5	-1,5
4,15	-7,8	13,35	-5,9	21,5	-0,8
5,34	-7,7	14,24	-5,6	23,5	-0,4
6,23	-7,6	15,37	-5,1	27,5	-0,1
7,12	-7,5	16	-4,8	31,5	0
8,01	-7,4	16,43	-4,6	35,5	0

Tab. 5.3 – Cedimenti oltre la piastra ottenuti dal modello tridimensionale modellato in Straus 7

I cedimenti si annullano a circa una decina di metri oltre il perimetro della piastra.

Si procede con i dati ottenuti con il serbatoio vuoto e grafico corrispondente:

	Modello 3D	Modello di Winkler (k=800 kPa/m)	Modello di Horvath (H=15m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
<b>SERBATOIO VUOTO</b>						
Distanza dal centro della piastra (m)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)
0	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
1,12	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
2,39	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
3,56	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
4,15	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
5,34	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
6,23	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,95
7,12	-0,9	-0,6	-0,8	-0,54	-0,18	-0,96
8,01	-0,9	-0,7	-0,8	-0,55	-0,18	-0,97
9,35	-0,9	-0,8	-0,9	-0,58	-0,19	-0,99
10,68	-1	-1,1	-1	-0,63	-0,23	-1,02
11,27	-1	-1,2	-1	-0,67	-0,25	-1,04
12,46	-1	-1,6	-1,2	-0,76	-0,32	-1,11
13,35	-1,1	-2	-1,4	-0,87	-0,41	-1,17
14,24	-1,2	-2,4	-1,5	-1	-0,53	-1,25
15,37	-1,3	-2,9	-1,8	-1,2	-0,71	-1,38
16	-1,4	-3,3	-2	-1,32	-0,83	-1,46
16,43	-1,4	-3,5	-2,1	-1,41	-0,92	-1,51

Tabella 5.4 – Cedimenti (cm) della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi - Serbatoio VUOTO

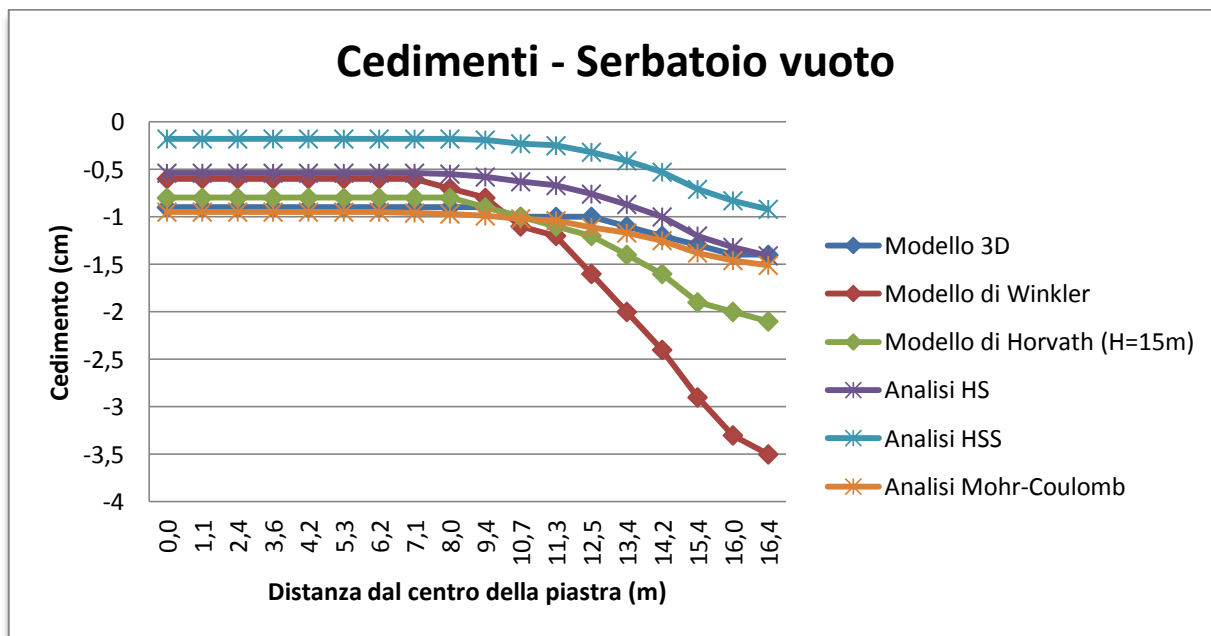


Fig. 5.10 - Grafico dei cedimenti della piastra di raggio 16m in caso di serbatoio VUOTO

Modello 3D					
Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)
0	-0,9	9,35	-0,9	16,9	-0,9
1,12	-0,9	10,68	-1	17,5	-0,7
2,39	-0,9	11,27	-1	18,5	-0,5
3,56	-0,9	12,46	-1	19,5	-0,4
4,15	-0,9	13,35	-1,1	21,5	-0,2
5,34	-0,9	14,24	-1,2	23,5	-0,1
6,23	-0,9	15,37	-1,3	27,5	0
7,12	-0,9	16	-1,4	31,5	0
8,01	-0,9	16,43	-1,4	35,5	0

Tab. 5.5 – Cedimenti oltre la piastra ottenuti dal modello tridimensionale modellato in Straus 7

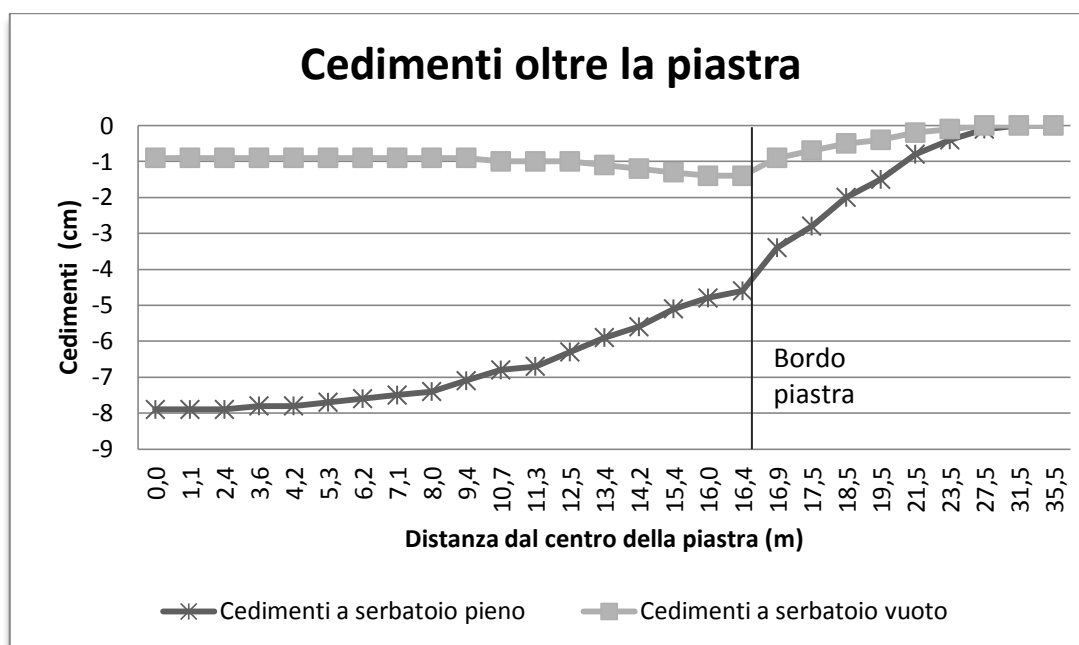


Fig. 5.11 - Confronto grafico tra i cedimenti della piastra di raggio 16m tra il caso di serbatoio pieno e serbatoio vuoto.

Passando ai risultati dei momenti flettenti radiali “RR” (riferito al sistema di riferimento cilindrico adottato durante la modellazione):

	Modello 3D	Modello di Winkler (k=800 kPa/m)	Modello di Horvath (H=15m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
	SERBATOIO PIENO					
Distanza dal centro (m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)
0,185	11,267	1,9	-0,332	10,65	8,74	10,4
0,49	10,958	1,52	-0,623	10,7	8,79	10,44
0,865	11,162	1,44	-0,355	10,81	8,9	10,5
1,31	11,388	1,252	-0,038	11,04	9,123	10,7
1,64	11,604	1,045	0,27	11,26	9,33	10,86
2,085	12,018	0,639	0,861	11,65	9,7	11,13
2,66	12,643	0,024	1,75	12,3	10,3	11,56
3,245	13,459	-0,779	2,905	13,13	11,07	12,03
3,855	14,468	-1,768	4,322	14,12	11,96	12,56
4,435	15,61	-2,88	5,916	15,3	12,98	13,08
5,03	16,98	-4,206	7,81	16,5	14,07	13,6
5,785	19,024	-6,165	10,598	18,43	15,61	14,22
6,675	21,728	-8,728	14,225	20,89	17,64	14,88
7,565	24,764	-11,566	18,206	23,52	19,65	15,45
8,455	28,009	-14,567	22,357	26,18	21,55	15,84
9,125	30,447	-16,815	25,416	28,02	22,8	<b>15,94</b>
9,63	32,231	-18,472	27,607	29,34	23,53	15,84
10,295	34,617	-20,787	30,504	30,66	24,13	15,41
10,975	35,996	-22,259	32,119	<b>31,43</b>	<b>24,2</b>	14,47
11,615	36,866	-23,354	33,072	31,4	23,58	13,16
12,21	<b>36,943</b>	<b>-23,854</b>	<b>33,049</b>	30,5	22,29	11,57
12,905	35,356	-23,225	30,882	28,31	19,96	9,61
13,795	31,032	-20,583	24,913	23,49	15,92	7,15
14,465	26,061	-17,071	17,795	18,6	12,26	5,72
15,03	20,109	-12,086	8,883	13,65	9,55	4,98
15,685	12,684	-4,513	0,518	8,98	7,44	5,23
16,07	8,009	0,335	-1,33	7,83	7,4	6,46
16,21	5,776	0,836	0,328	5	4,74	4,35
16,355	1,948	0,322	0,628	1,03	0,96	0,88

Tabella 5.6 – Momenti radiali (kNm/m) della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi Serbatoio PIENO

Si procede con i dati ottenuti con il serbatoio vuoto e grafici dei momenti corrispondenti:

	Modello 3D	Modello di Winkler (k=800 kPa/m)	Modello di Horvath (H=15m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
SERBATOIO VUOTO						
Distanza dal centro (m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)
0,185	-0,051	4,217	1,689	-0,19	0,2	-0,05
0,49	-0,094	4,085	1,612	-0,19	0,22	-0,05
0,865	-0,097	3,762	1,486	-0,2	0,21	-0,04
1,31	-0,111	3,284	1,295	-0,22	0,181	-0,03
1,64	-0,128	2,796	1,098	-0,24	0,15	-0,02
2,085	-0,163	1,848	0,713	-0,28	0,09	-0,01
2,66	-0,221	0,414	0,128	-0,35	-0,01	0
3,245	-0,306	-1,452	-0,641	-0,46	-0,18	0
3,855	-0,425	-3,752	-1,598	-0,59	-0,42	-0,01
4,435	-0,577	-6,344	-2,688	-0,77	-0,72	-0,07
5,03	-0,788	-9,438	-4	-1,01	-1,15	-0,2
5,785	-1,165	-14,02	-5,997	-1,42	-1,86	-0,53
6,675	-1,769	-20,031	-8,664	-2,11	-3,09	-1,24
7,565	-2,618	-26,717	-11,714	-3,06	-4,82	-2,48
8,455	-3,774	-33,827	-15,067	-4,36	-7,15	-4,43
9,125	-4,821	-39,178	-17,663	-5,6	-9,38	-6,41
9,63	-5,8	-43,154	-19,67	-6,71	-11,3	-8,4
10,295	-7,512	-48,734	-22,617	-8,33	-14,1	-11,4
10,975	-8,999	-52,298	-24,652	-10,32	-17,41	-15,18
11,615	-10,715	-55,115	-26,481	-12,22	-20,45	-19,47
12,21	-12,303	<b>-56,561</b>	-27,723	-14,04	-23,21	-23,68
12,905	-13,822	-55,489	<b>-28,038</b>	-15,83	-25,64	-27,57
13,795	<b>-14,537</b>	-49,891	-26,573	<b>-16,97</b>	<b>-26,3</b>	<b>-28,97</b>
14,465	-13,689	-42,165	-23,862	-16,08	-23,58	-26,1
15,03	-10,382	-30,972	-19,144	-12,9	-18,1	-20,26
15,685	-3,159	-13,824	-9,712	-5,37	-7,65	-8,94
16,07	2,216	-2,405	-1,969	2,5	1,08	1,18
16,21	2,392	0,097	0,3819	2,5	2,13	1,79
16,355	0,97	0,119	0,435	0,77	0,68	0,43

Tabella 5.7 – Momenti radiali (kNm/m) della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi  
Serbatoio VUOTO

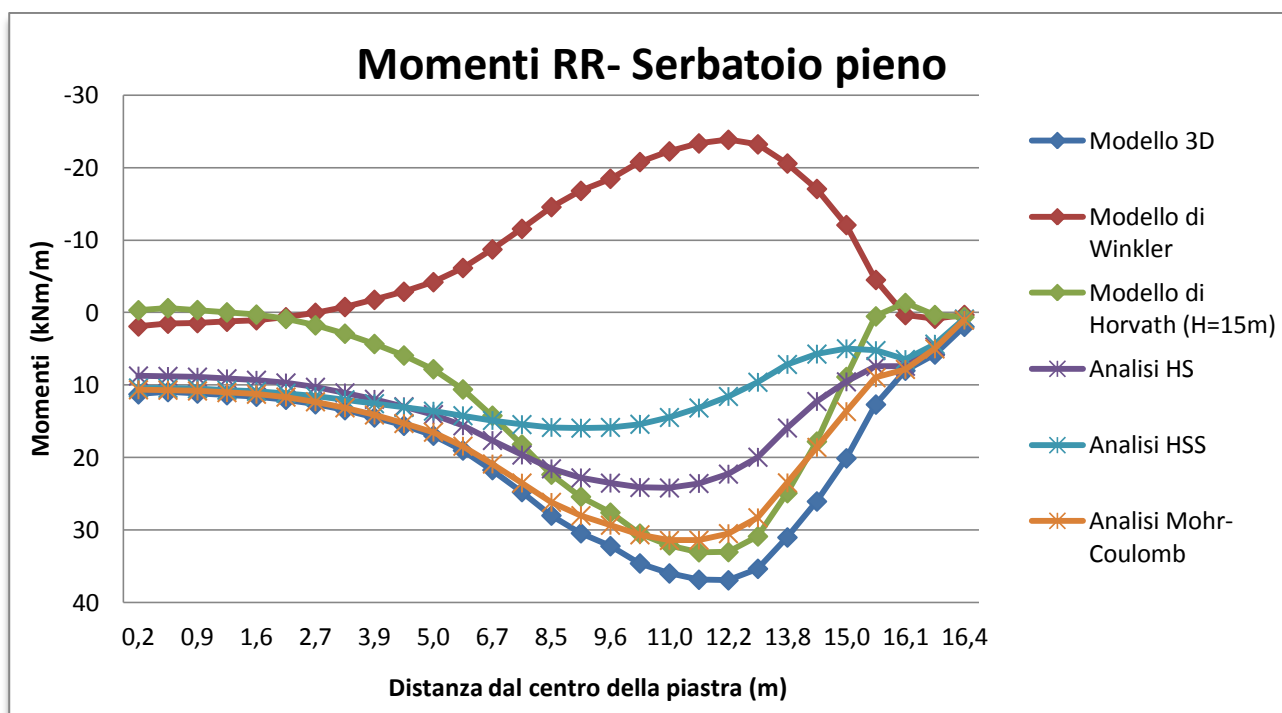


Fig. 5.12 - Grafico dei momenti RR della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi in caso di serbatoio PIENO  
(riferimento alla tabella 5.6)

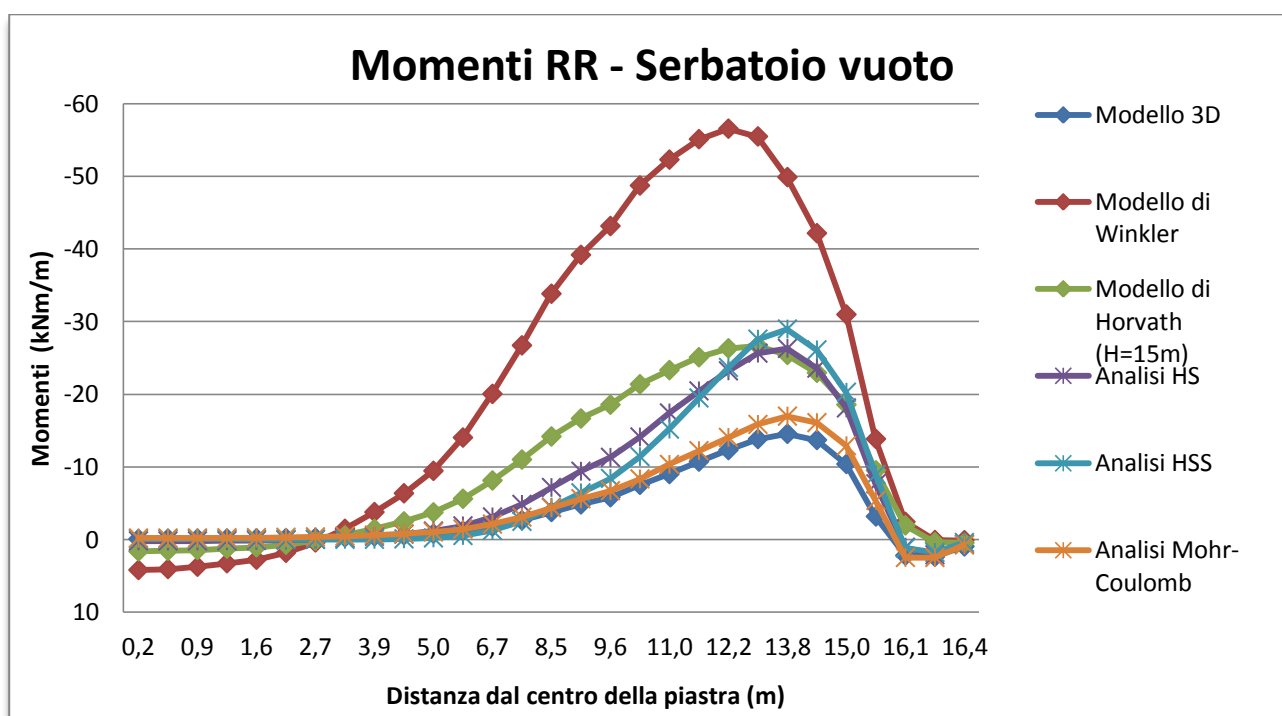


Fig. 5.13 - Grafico dei momenti RR della piastra di raggio 16m ottenuti dalle varie analisi in caso di serbatoio VUOTO  
(riferimento alla tabella 5.7)

Nello studio dei risultati ottenuti, è chiaramente visibile il differente andamento del modello di Winkler: partendo dai cedimenti nel caso di serbatoio pieno, si nota che quest'ultimo è l'unico ad aumentare il loro valore ai bordi della struttura, a differenza degli altri modelli in cui il fenomeno è attutito. Il problema si ripropone anche in caso di serbatoio vuoto dove i cedimenti nel modello di Winkler ai bordi della piastra d'appoggio hanno valori assai più alti rispetto agli altri; il modello registra quindi un più elevato cedimento soprattutto nei punti in cui sono applicate le forze. Anche l'analisi non lineare HSS si discosta dagli altri andamenti: in entrambi i casi registra cedimenti minori. Il modello tridimensionale, quello di Horvath, le analisi HS e quelle di Mohr-Coulomb hanno un andamento simile, cambiano di poco l'intensità dei cedimenti. Tra questi, gli andamenti delle analisi HS e di Mohr-Coulomb rispecchiano la tendenza del terreno sottostante la fondazione superficiale a comprimersi in maniera edometrica nella zona centrale, e a sviluppare fenomeni di plasticizzazione nei pressi dei bordi.

Con i modelli che includono l'elemento "terreno" (ovvero nel modello tridimensionale e in tutte le analisi non lineari), si sono ottenuti i valori dell'abbassamento del suolo limitrofo alla piastra. Per il caso più gravoso, valori significativi di cedimenti si hanno per un raggio di una decina di metri oltre il perimetro della fondazione superficiale.

Osservando il grafico dei momenti in caso di serbatoio carico d'acqua, si nota che dalle analisi non lineari si ottengono momenti minori rispetto al modello tridimensionale e quello di Horvath. I valori maggiori si sviluppano ad una distanza di circa  $2/3$  del raggio (partendo dal centro); le grandi dimensioni della piastra permettono uno smorzamento dei valori nella zona centrale. In questo caso si sottolinea la significativa distanza tra i valori del modello 3D e quelli dell'analisi HSS: per il primo, il massimo momento raggiunto nella piastra è di 15,94 kNm/m, mentre per il secondo è di 36,94 kNm/m. I risultati di Winkler hanno andamento opposto: questo perché tale soluzione non sa riconoscere il carico distribuito dovuto alla presenza dell'acqua e i momenti registrati sono prodotti dal carico lineare perimetrale del muro esterno. Nel caso di serbatoio vuoto, l'andamento dei risultati è il medesimo, la differenza si ha in maniera non eccessiva tra i vari modelli eccetto per quello di Winkler, che raggiunge il suo punto di massimo con il valore del momento di -56,561 kNm/m (il momento massimo ottenuto, per esempio, nel modello tridimensionale è di -14.537 kNm/m).

### 5.3.2 - serbatoio di raggio 6m

Vengono riportati i dati ottenuti da una piastra di uguale rigidezza, ma ridotta nelle dimensioni. Sono stati mantenuti gli stessi carichi e la stessa stratigrafia del terreno in modo tale da poter confrontare i risultati tra una piastra di diametro maggiore e una minore.

Risultati dei cedimenti a serbatoio pieno:

	<b>Modello 3D</b>	<b>Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)</b>	<b>Modello di Horvath (H=10,8 m)</b>	<b>Analisi Mohr- Coulomb</b>	<b>Analisi HS</b>	<b>Analisi HSS</b>
	<b>SERBATOIO PIENO</b>					
Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)
0	-5	-5	-5	-5,26	-5,82	-4,53
0,37	-5	-5	-5	-5,26	-5,82	-4,53
0,61	-5	-5	-5	-5,25	-5,82	-4,53
1,12	-5	-5	-5	-5,22	-5,79	-4,51
1,5	-5	-5	-4,9	-5,19	-5,77	-4,49
1,78	-4,9	-5	-4,9	-5,17	-5,75	-4,48
2,39	-4,8	-5,1	-4,9	-5,1	-5,69	-4,44
2,93	-4,8	-5,1	-4,8	-5,02	-5,62	-4,39
3,56	-4,6	-5,2	-4,7	-4,91	-5,53	-4,33
4,15	-4,5	-5,2	-4,6	-4,8	-5,44	-4,27
4,72	-4,3	-5,3	-4,6	-4,69	-5,34	-4,2
5,34	-4,2	-5,4	-4,5	-4,56	-5,23	-4,13
6	-4	-5,5	-4,4	-4,41	-5,11	-4,05
6,43	-3,8	-5,5	-4,3	-4,32	-5,03	-3,99

Tabella 5.8 – Cedimenti (cm) della piastra di raggio 6m ottenuti dalle varie analisi  
Serbatoio PIENO



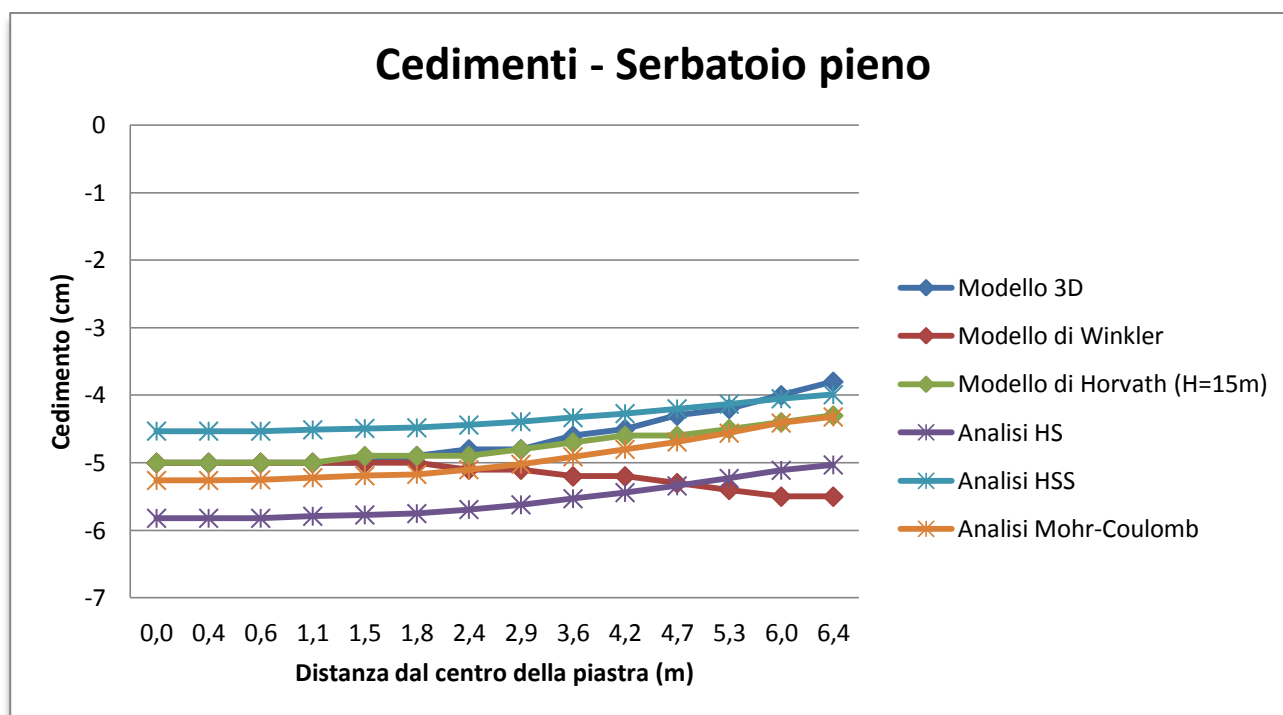


Fig. 5.14 - Grafico dei cedimenti della piastra di raggio 6m ottenuti dalle varie analisi in caso di serbatoio PIENO  
(riferimento alla tabella 5.8)

I cedimenti sul terreno limitrofo alla piastra sono i seguenti (ottenuti grazie al modello tridimensionale):

Modello 3D					
Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)
0	-5	5,34	-4,2	12,46	-0,4
0,37	-5	6	-4	13,358	-0,3
0,61	-5	6,43	-3,8	14,248	-0,2
1,12	-5	7,12	-2,5	14,69	-0,2
1,5	-5	8,01	-1,8	15,37	-0,2
1,78	-4,9	8,9	-1,3	16	-0,1
2,39	-4,8	9,35	-1,2	16,9	-0,1
2,93	-4,8	9,91	-1	17,5	-0,1
3,56	-4,6	10,68	-0,8	18,5	0
4,15	-4,5	11,27	-0,7	19,5	0
4,72	-4,3	11,96	-0,5	20,5	0

Tab. 5.9 – Cedimenti oltre la piastra ottenuti dal modello tridimensionale modellato in Straus 7

Si procede con i dati ottenuti con il serbatoio vuoto e grafico corrispondente:

	Modello 3D	Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)	Modello di Horvath (H=10,8 m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
SERBATOIO VUOTO						
Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)	Cedimento (cm)
0	-1	-0,8	-0,9	-1,07	-0,78	-0,27
0,37	-1	-0,8	-0,9	-1,07	-0,78	-0,27
0,61	-1	-0,8	-0,9	-1,07	-0,78	-0,28
1,12	-1	-0,9	-0,9	-1,08	-0,79	-0,29
1,5	-1	-0,9	-0,9	-1,09	-0,81	-0,3
1,78	-1	-0,9	-0,9	-1,1	-0,82	-0,32
2,39	-1,1	-1	-1	-1,12	-0,86	-0,35
2,93	-1,1	-1,1	-1	-1,15	-0,9	-0,4
3,56	-1,1	-1,3	-1,1	-1,18	-0,97	-0,46
4,15	-1,2	-1,4	-1,2	-1,23	-1,03	-0,53
4,72	-1,2	-1,6	-1,3	-1,27	-1,11	-0,61
5,34	-1,2	-1,8	-1,4	-1,33	-1,2	-0,71
6	-1,3	-2	-1,5	-1,4	-1,29	-0,81
6,43	-1,3	-2,1	-1,6	-1,44	-1,36	-0,88

Tabella 5.10 – Cedimenti (cm) della piastra di raggio 6m ottenuti dalle varie analisi  
Serbatoio VUOTO

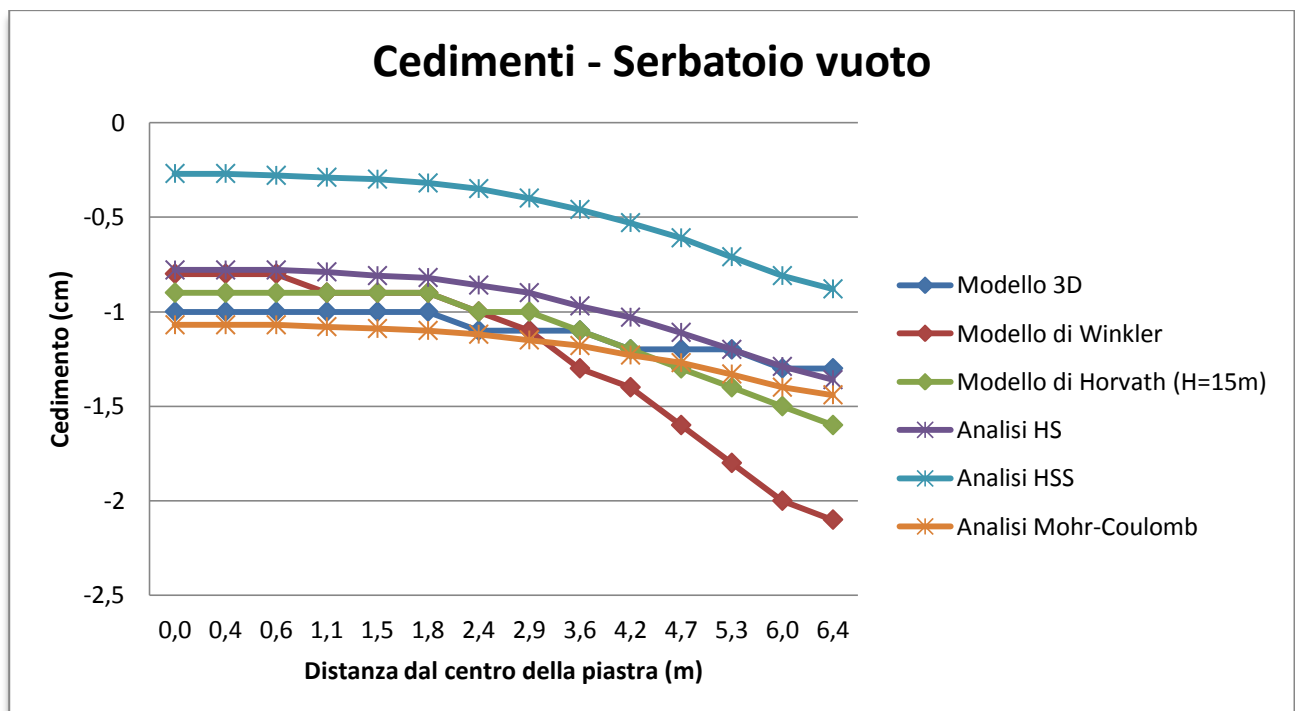


Fig. 5.15 - Grafico dei cedimenti della piastra di raggio 6m in caso di serbatoio VUOTO.

I cedimenti nel terreno in caso di serbatoio vuoto sono:

Modello 3D					
Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)	Distanza dal centro (m)	Cedimento (cm)
0	-1	5,34	-1,2	12,46	-0,1
0,37	-1	6	-1,3	13,358	-0,1
0,61	-1	6,43	-1,3	14,248	-0,1
1,12	-1	7,12	-0,8	14,69	-0,1
1,5	-1	8,01	-0,5	15,37	-0,1
1,78	-1	8,9	-0,4	16	0
2,39	-1,1	9,35	-0,4	16,9	0
2,93	-1,1	9,91	-0,3	17,5	0
3,56	-1,1	10,68	-0,2	18,5	0
4,15	-1,2	11,27	-0,2	19,5	0
4,72	-1,2	11,96	-0,2	20,5	0

Tab. 5.11 – Cedimenti oltre la piastra ottenuti dal modello tridimensionale modellato in Straus 7

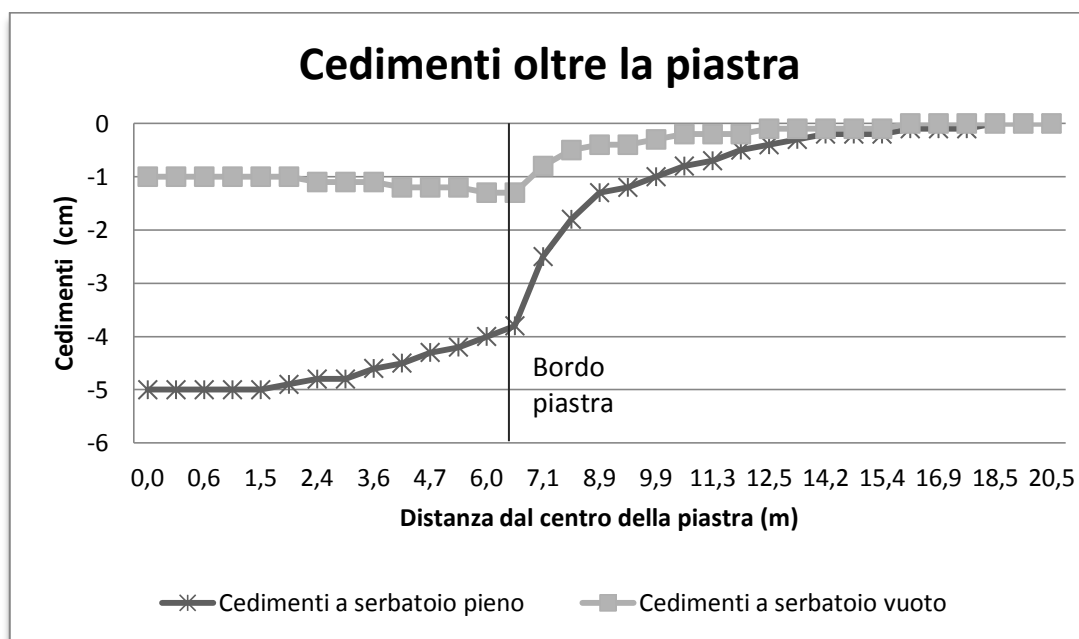


Fig. 5.16 - Confronto grafico tra i cedimenti della piastra di raggio 6m tra il caso di serbatoio pieno e serbatoio vuoto.

Passando ai risultati dei momenti flettenti radiali “RR”:

	Modello 3D	Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)	Modello di Horvath (H=10,8 m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
SERBATOIO PIENO						
Distanza dal centro (m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)
0,185	<b>59,729</b>	-26,433	<b>36,026</b>	<b>49,27</b>	<b>42,05</b>	<b>29,31</b>
0,49	59,163	<b>-26,716</b>	35,635	48,98	41,72	29,06
0,865	58,457	-26,413	35,367	48,18	41,07	28,38
1,31	57,343	-26,031	34,729	46,72	39,75	27,16
1,64	56,179	-25,64	33,948	45,22	38,34	26,12
2,085	53,835	-24,816	32,254	42,94	36,05	24,31
2,66	50,176	-23,461	29,503	38,76	32,4	21,55
3,245	45,206	-21,454	25,556	33,68	28	18,4
3,855	38,891	-18,653	20,229	27,58	22,72	14,85
4,435	31,655	-15,054	13,649	21,17	17,58	11,53
5,03	23,148	-10,146	5,425	14,72	12,78	8,82
5,67	13,766	-3,343	-0,938	8,97	8,7	6,83
6,07	7,857	0,969	-2,044	7,43	7,47	6,9
6,21	6,258	1,185	-0,279	4,67	4,69	4,4
6,355	2,109	0,44	-0,369	0,69	0,69	0,82

Tabella 5.12 – Momenti (kNm/m) della piastra di raggio 6m ottenuti dalle varie analisi Serbatoio PIENO

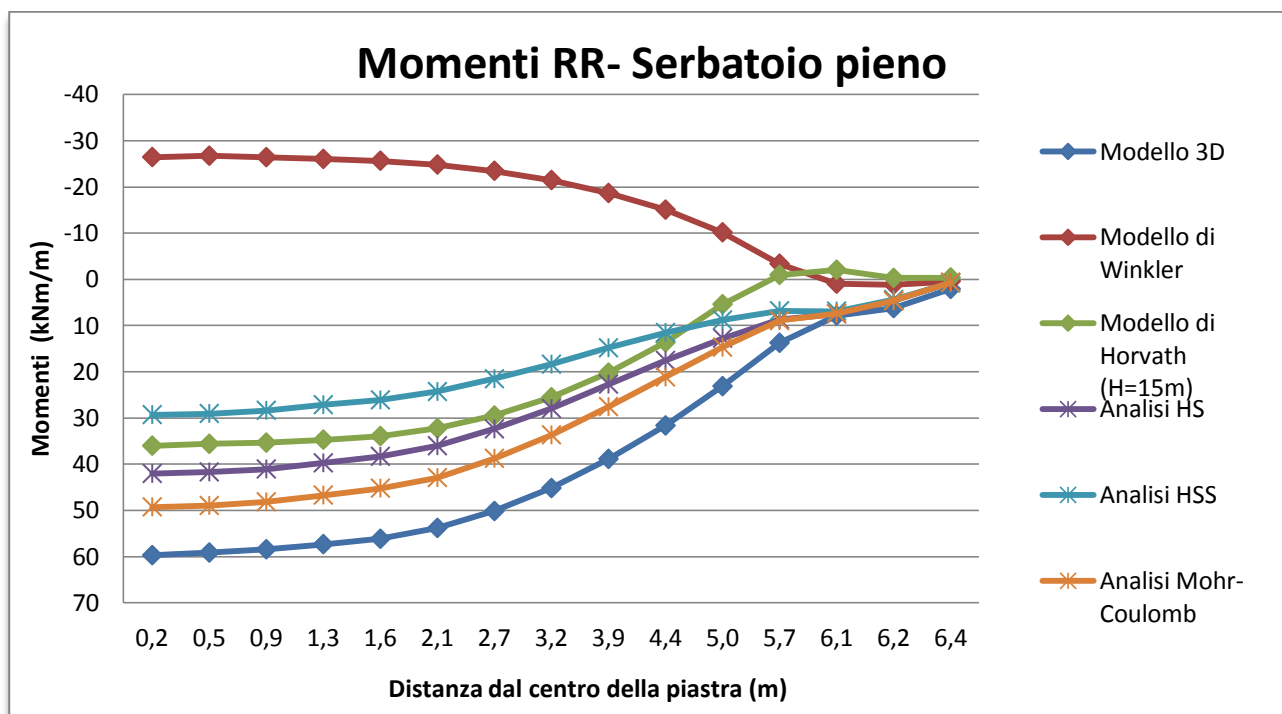


Fig. 5.17 - Grafico dei momenti RR della piastra di raggio 16m in caso di serbatoio PIENO (riferimento alla tabella 5.12)

Si procede con i dati ottenuti con il serbatoio vuoto e grafici dei momenti corrispondenti:

	Modello 3D	Modello di Winkler ( $k=1350$ kPa/m)	Modello di Horvath ( $H=10,8$ m)	Analisi Mohr-Coulomb	Analisi HS	Analisi HSS
SERBATOIO VUOTO						
Distanza dal centro (m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)	Momenti (kNm/m)
0,185	-12,482	<b>-63,374</b>	<b>-35,103</b>	-14,7	-24,28	-22,89
0,49	-12,573	-63,276	-35,088	-14,77	-24,37	-23,2
0,865	-12,741	-62,766	-34,886	-14,96	-24,55	-23,88
1,31	-12,979	-61,999	-34,588	-15,27	-24,88	-25,11
1,64	-13,2	-61,179	-34,265	-15,57	-25,18	-26,18
2,085	-13,53	-59,42	-33,55	-15,97	-25,55	-27,42
2,66	-13,858	-56,491	-32,328	-16,45	<b>-25,82</b>	<b>-28,49</b>
3,245	<b>-13,876</b>	-52,09	-30,431	<b>-16,65</b>	-25,53	-28,43
3,855	-13,276	-45,878	-27,676	-16,2	-24	-26,77
4,435	-11,651	-37,814	-23,988	-14,65	-21	-23,28
5,03	-8,184	-26,712	-18,603	-11,15	-15,32	-17,34
5,67	-1,399	-11,202	-9,097	-4,29	-6,19	-7,33
6,07	3,46	-1,033	-1,669	2,58	2,31	1,56
6,21	2,988	0,643	0,337	2,86	2,64	2,37
6,355	1,17	0,409	0,444	0,6	0,58	0,63

Tabella 5.13 – Momenti radiali (kNm/m) della piastra di raggio 6m ottenuti dalle varie analisi  
Serbatoio VUOTO

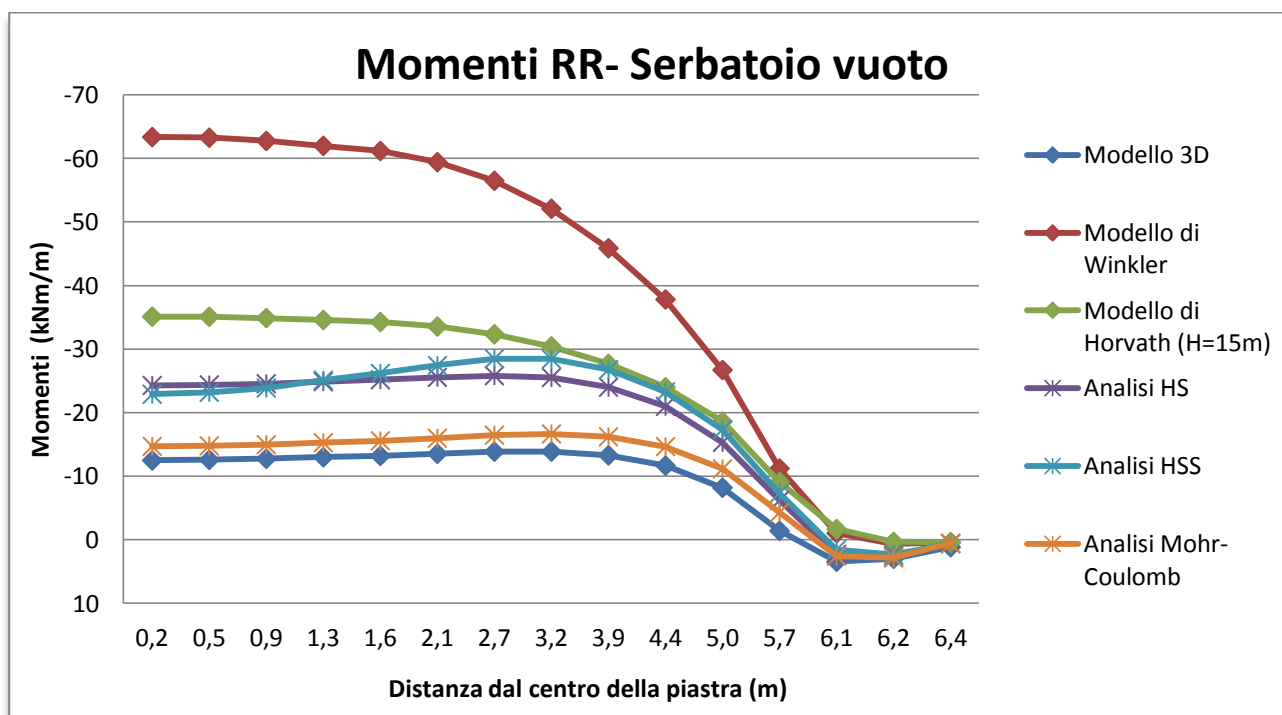


Fig. 5.18 - Grafico dei momenti RR della piastra di raggio 6m in caso di serbatoio VUOTO.

Anche per una piastra di dimensioni più ridotte, per la precisione di raggio interno di 6m, i cedimenti nel caso di serbatoio soggetto a carico idrostatico ottenuti dal modello di Winkler presentano la stessa anomalia notata con il serbatoio più grande: registra infatti un maggior cedimento ai bordi rispetto a quello centrale. In realtà anche se il trend per gli altri modelli è il medesimo, si sottolinea la differenza di oltre un centimetro tra i cedimenti dell'analisi HSS e quelli dell'analisi HS. Nell'ipotesi di serbatoio vuoto, gli abbassamenti maggiori si hanno ai bordi con il modello proposto da Winkler mentre l'analisi HSS riporta valori molto più bassi allontanandosi eccessivamente dai risultati degli altri modelli. I cedimenti del terreno nelle vicinanze della struttura sono praticamente trascurabili ad una distanza di 7m dal perimetro della piastra (sempre in riferimento al caso più gravoso, di serbatoio pieno).

Passando ai momenti flettenti sviluppati nella piastra, in caso di serbatoio colmo d'acqua l'unico trend opposto agli altri riguarda il modello di Winkler; gli altri modelli hanno stesso andamento, ma intensità di cedimento molto vario: il modello tridimensionale realizzato in Straus 7 riporta al centro della piastra un momento di 60 kNm/m mentre l'analisi non lineare HSS di 30 kNm/m. Il grafico riferito al caso di serbatoio vuoto, invece, presenta un andamento identico, anche se l'intensità dei valori dei momenti varia molto. I valori dei momenti in modulo più alti derivano dai risultati del modello di Winkler (che misura un valore massimo di -63.374 kNm/m); il modello di Horvath e il 3D differiscono del 60% mentre dalle analisi non lineari si sono ottenuti risultati numericamente più vicini.

Facendo un confronto con i grafici dei momenti della piastra di raggio 16m, si nota che in una piastra di dimensioni ridotte il momento non presenta l'attenuazione verso il centro della struttura: nel caso del raggio di 6m, infatti, si registrano valori dei momenti alquanto alti anche nella zona centrale della piastra mentre in quella più grande il loro valore centrale è molto basso dal momento che lo spazio a disposizione gli permette di sviluppare un effetto smorzante.

## 5.4 - Valore della profondità di influenza H per il modello proposto da Horvath

La questione sulla scelta del valore della profondità di influenza H merita di essere approfondita; questo parametro, infatti, influenza significativamente i risultati finali del modello MK-R modificato di J. S. Horvath. Nelle pagine precedenti, per tale modello è stato usato un valore di H determinato in modo da ottenere gli stessi cedimenti della zona centrale del modello tridimensionale. Come descritto nel capitolo 3.2, anche J. A. Charles propose una propria soluzione per la determinazione di questo parametro. Si confrontano ora i valori ottenuti per le due piastre, in modo da capire se effettivamente le formule di Charles possono essere applicate durante la modellazione del MK-R modificato.

Nel caso specifico della piastra di raggio 16m, il valore usato per essere confrontato con gli altri modelli è di un H pari a 15m. La soluzione di Charles fornisce un valore di H di 15.5m (differisce di solo il 3%).

I cedimenti ottenuti nei due casi:

CEDIMENTI				
Distanza dal centro (m)	Serbatoio PIENO		Serbatoio VUOTO	
	Horvath (H=15m)	Horvath (H=Charles =15,5m)	Horvath (H=15m)	Horvath (H=Charles =15,5m)
0	-7,8	-8	-0,8	-0,8
1,12	-7,8	-8	-0,8	-0,8
2,39	-7,8	-8	-0,8	-0,8
3,56	-7,8	-8	-0,8	-0,8
4,15	-7,8	-8	-0,8	-0,8
5,34	-7,8	-8	-0,8	-0,8
6,23	-7,7	-7,9	-0,8	-0,8
7,12	-7,7	-7,9	-0,8	-0,8
8,01	-7,6	-7,8	-0,8	-0,8
9,35	-7,5	-7,7	-0,9	-0,9
10,68	-7,3	-7,5	-1	-1
11,27	-7,2	-7,4	-1,1	-1,1
12,46	-7	-7,1	-1,2	-1,3
13,35	-6,8	-6,9	-1,4	-1,4
14,24	-6,5	-6,6	-1,6	-1,6
15,37	-6,1	-6,2	-1,9	-1,9
16	-5,9	-6	-2	-2,1
16,43	-5,8	-5,9	-2,1	-2,2

Tab. 5.14 – Confronto dei cedimenti ottenuti con H=15m e H=Charles=15.5m

Passando ai risultati dei momenti flettenti radiali “RR”:

MOMENTI				
	Serbatoio PIENO		Serbatoio VUOTO	
Distanza dal centro (m)	Horvath (H=15m)	Horvath (H=Charles =15,5m)	Horvath (H=15m)	Horvath (H=Charles =15,5m)
0,185	-0,332	-0,136	1,689	1,584
0,49	-0,623	-0,424	1,612	1,506
0,865	-0,355	-0,148	1,486	1,377
1,31	-0,038	0,181	1,295	1,18
1,64	0,27	0,501	1,098	0,978
2,085	0,861	1,114	0,713	0,584
2,66	1,75	2,037	0,128	-0,014
3,245	2,905	3,233	-0,641	-0,8
3,855	4,322	4,699	-1,598	-1,775
4,435	5,916	6,345	-2,688	-2,884
5,03	7,81	8,297	-4	-4,223
5,785	10,598	11,163	-5,997	-6,236
6,675	14,225	14,88	-8,664	-8,925
7,565	18,206	18,946	-11,714	-11,988
8,455	22,357	23,168	-15,067	-15,431
9,125	25,416	26,269	-17,663	-17,93
9,63	27,607	28,479	-19,67	-19,923
10,295	30,504	31,387	-22,617	-22,839
10,975	32,119	32,989	-24,652	-24,843
11,615	<b>33,072</b>	<b>33,907</b>	-26,481	-26,629
12,21	33,049	33,832	-27,723	-27,827
12,905	30,882	31,568	<b>-28,038</b>	<b>-28,088</b>
13,795	24,913	25,435	-26,573	-26,526
14,465	17,795	18,166	-23,862	-23,815
15,03	8,883	9,102	-19,144	-19,087
15,685	0,518	0,579	-9,712	-9,661
16,07	-1,33	-1,334	-1,969	-1,929
16,21	0,328	0,331	0,319	0,354
16,355	0,614	0,619	0,435	0,451

Tab. 5.15 – Confronto dei momenti radiali ottenuti con H=15m e H=Charles=15.5m



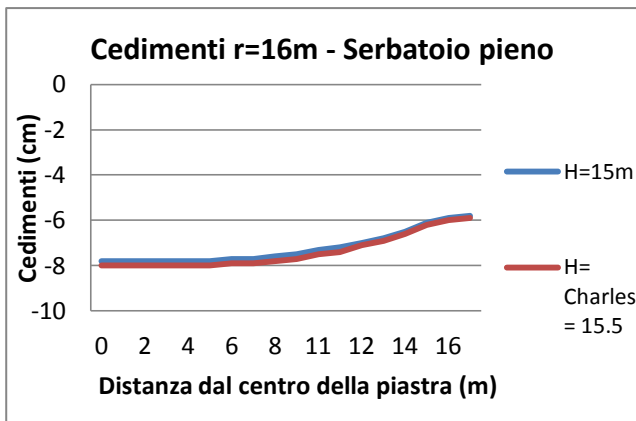


Fig. 5.19 – Grafico dei cedimenti con H=15m e H=15.5m nel caso di serbatoio PIENO d'acqua.

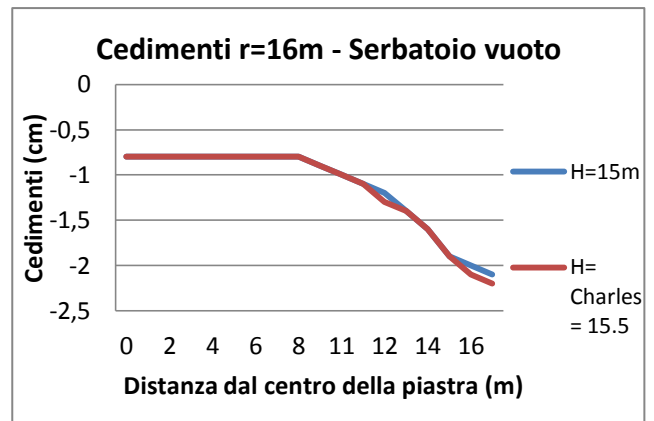


Fig. 5.20 – Grafico dei cedimenti con H=15m e H=15.5m nel caso di serbatoio VUOTO.

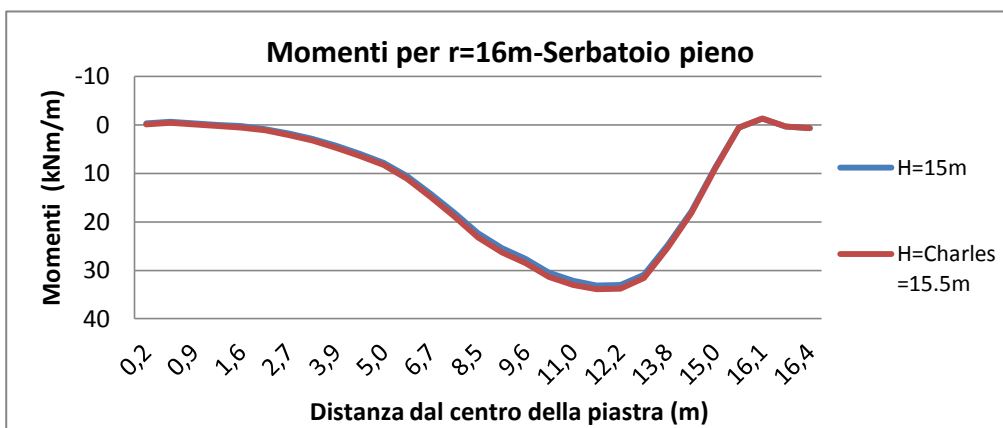


Fig. 5.21 - Grafico dei momenti con H= 15m e H=15.5m nel caso di serbatoio PIENO d'acqua.

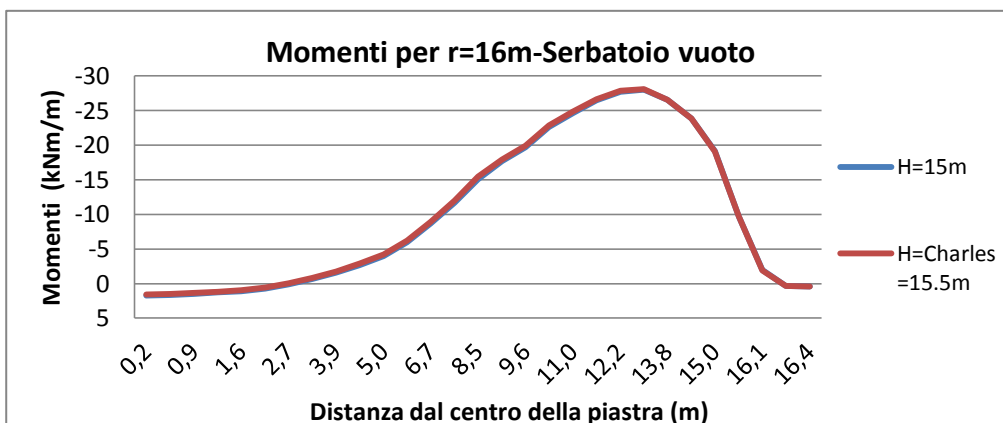


Fig. 5.22 - Grafico dei momenti con H= 15m e H=15.5m nel caso di serbatoio VUOTO.

E' evidente la corrispondenza tra i risultati dei due casi studiati.

Si sono analizzati anche i risultati derivanti da una variazione del valore di H di Charles del  $\pm 3\%$ ,  $\pm 5\%$  e  $\pm 10\%$  per determinare quanto i dati ottenuti in questi casi differiscono rispetto a quelli derivanti da  $H=15.5\text{m}$  (dato di partenza). Nella seguente tabella vengono elencati i valori delle rigidzze  $k_h$ ,  $k_l$  e delle forze costanti di trazione T al variare del valore di H con relativi grafici:

	H Charles - 10%	H Charles - 5%	H Charles - 3%	H Charles	H Charles + 3%	H Charles + 5%	H Charles + 10%
Variazione %	-10%	-5%	-3%	0	3%	5%	10%
Valore H (m)	13,95	14,725	15,035	15,5	15,965	16,275	17,05
$k_h$	3727,599	3531,409	3458,597	3354,839	3257,125	3195,084	3049,853
$k_l$	1242,533	1177,136	1152,866	1118,28	1085,708	1065,028	1016,618
T	33583,33	35449,07	36195,37	37314,81	38434,26	39180,56	41046,3

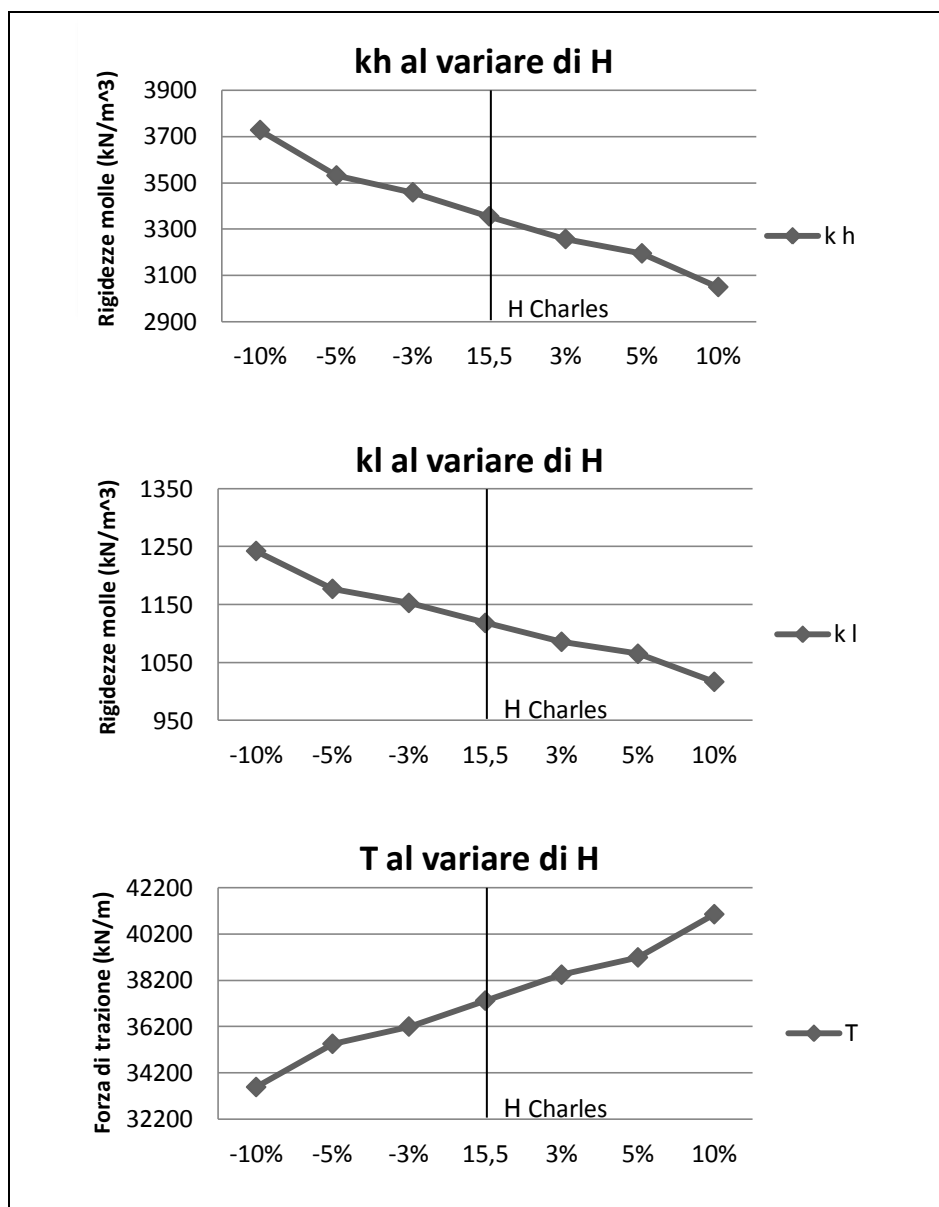


Fig. 5.23 –  $k_h$ ,  $k_l$  e T in funzione alla variazione del parametro H

Si riportano i valori dei momenti radiali massimi misurati nei diversi casi:

	Serbatoio PIENO						
	H Charles - 10%	H Charles - 5%	H Charles - 3%	H=Charles =15,5m	H Charles + 3%	H Charles + 5%	H Charles + 10%
Variazione %	-10%	-5%	-3%	0	3%	5%	10%
Valore H (m)	13,95	14,725	15,035	15,5	15,965	16,275	17,05
Momento max (kNm/m)	31,384	32,587	33,145	33,907	34,576	35,029	36,21

Tabella 5.16 – Momenti massimi ottenuti nei diversi casi di variazione di H in condizione di serbatoio PIENO.

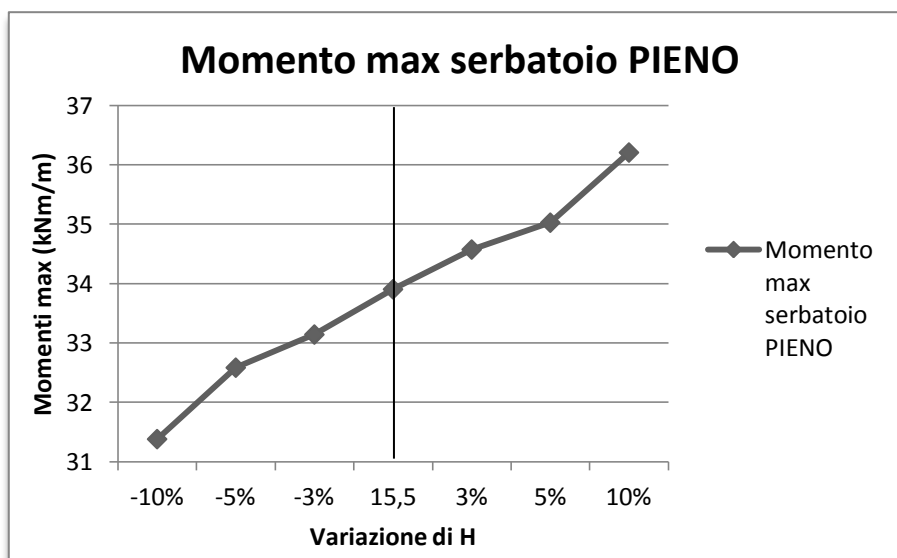


Fig. 5.24 – Grafico dei momenti massimi in funzione della variazione di H in condizione di serbatoio PIENO.

	Serbatoio VUOTO						
	H Charles - 10%	H Charles - 5%	H Charles - 3%	H=Charles =15,5m	H Charles + 3%	H Charles + 5%	H Charles + 10%
	-10%	-5%	-3%	15,5	3%	5%	10%
Valore H (m)	13,95	14,725	15,035	15,5	15,965	16,275	17,05
Momento max (kNm/m)	-27,565	-27,667	-28,05	-28,088	-28,439	-28,57	-28,871

Tabella 5.17 – Momenti massimi ottenuti nei diversi casi di variazione di H in condizione di serbatoio VUOTO.

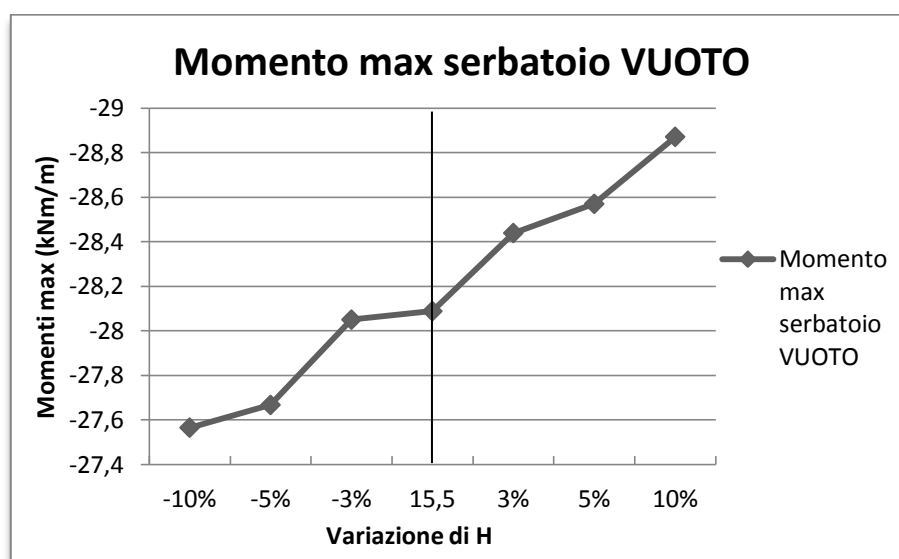


Fig. 5.25 – Grafico dei momenti massimi in funzione della variazione di H in condizione di serbatoio VUOTO.

I risultati di questo studio dimostrano che pure variando il valore di H fino ad una percentuale del 10%, il momento massimo differisce nella situazione più gravosa dell'8% rispetto al valore di riferimento iniziale (Fig. 5.25). E' quindi accettabile una differenza in questi termini. Infatti, variazioni limitate nell'entità dei momenti dovuti all'imprecisione nella valutazione dello spessore H possono essere compensati dai coefficienti di sicurezza presenti nella fase di progettazione.

Passando alla piastra di raggio inferiore di 6m, l'H ottenuto per il confronto con gli altri modelli è pari a 10.8m. La soluzione di Charles fornisce, invece, un valore di 8.6m (ipotizzando per il terreno in esame un angolo di attrito  $\phi$  di 35°). In questo caso l'H di Charles differisce da quello di riferimento del 20% e quindi ci si aspetta una differenza di risultati meno trascurabile rispetto a quella ottenuta per la piastra più grande.

I cedimenti ottenuti nei due casi:

CEDIMENTI				
Distanza dal centro (m)	Serbatoio PIENO		Serbatoio VUOTO	
	Horvath (H=10,8m)	Horvath (H=Charles =8,6m, fi=35)	Horvath (H=10,8m)	Horvath (H=Charles =8,6m, fi=35)
0	-5	-4	-0,9	-0,7
0,37	-5	-4	-0,9	-0,7
0,61	-5	-4	-0,9	-0,7
1,12	-5	-4	-0,9	-0,7
1,5	-4,9	-4	-0,9	-0,7
1,78	-4,9	-4	-0,9	-0,7
2,39	-4,9	-3,9	-1	-0,8
2,93	-4,8	-3,9	-1	-0,8
3,56	-4,7	-3,8	-1,1	-0,9
4,15	-4,6	-3,8	-1,2	-1
4,72	-4,6	-3,7	-1,3	-1,1
5,34	-4,5	-3,6	-1,4	-1,2
6	-4,4	-3,5	-1,5	-1,3
6,43	-4,3	-3,5	-1,6	-1,4

Tab. 5.17 – Confronto dei cedimenti ottenuti con H=10.8m e H=Charles=8.6m.

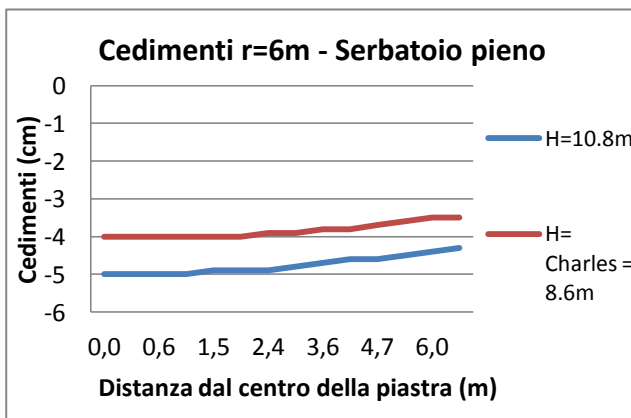


Fig. 5.26 – Grafico dei cedimenti con H=10.8m e H=8.6m nel caso di serbatoio PIENO d'acqua.

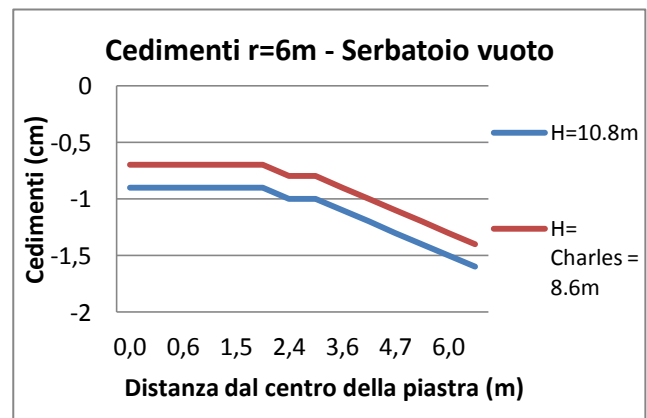


Fig. 5.27 – Grafico dei cedimenti con H=10.8m e H=8.6m nel caso di serbatoio VUOTO.

MOMENTI				
	Serbatoio PIENO		Serbatoio VUOTO	
Distanza dal centro (m)	Horvath (H=10,8m)	Horvath (H=Charles=8,6m, fi=35)	Horvath (H=10,8m)	Horvath (H=Charles=8,6m, fi=35)
0,185	<b>36,026</b>	<b>29,077</b>	<b>-35,103</b>	-31,284
0,49	35,635	28,728	-35,088	<b>-31,298</b>
0,865	35,367	28,606	-34,886	-31,196
1,31	34,729	28,184	-34,588	-31,039
1,64	33,948	27,609	-34,265	-30,857
2,085	32,254	26,322	-33,55	-30,406
2,66	29,503	24,182	-32,328	-29,564
3,245	25,556	21,019	-30,431	-28,119
3,855	20,229	16,643	-27,676	-25,861
4,435	13,649	11,112	-23,988	-22,652
5,03	5,425	4,083	-18,603	-17,721
5,67	-0,938	-1,187	-9,097	-8,637
6,07	-2,044	-1,861	-1,669	-1,448
6,21	-0,279	-0,207	0,337	0,463
6,355	-0,369	0,358	0,444	0,482

Tabella 5.18 - Confronto dei momenti radiali ottenuti con H=10.8m e H=Charles=8.6m

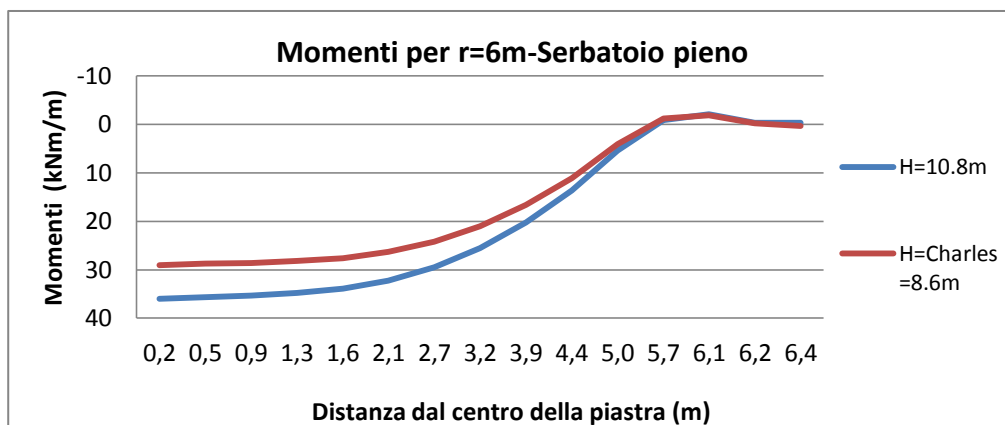


Fig. 5.28 - Grafico dei momenti con H= 15m e H=15.5m nel caso di serbatoio PIENO d'acqua.

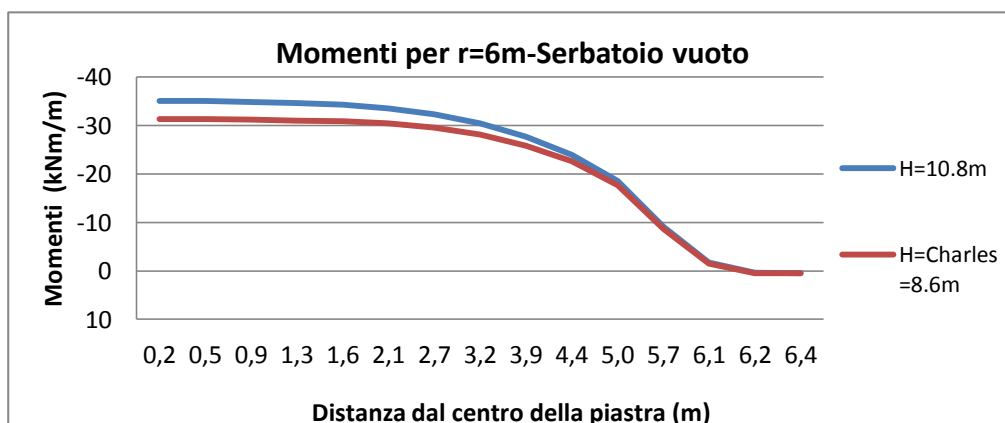


Fig. 5.29 - Grafico dei momenti con H= 15m e H=15.5m nel caso di serbatoio VUOTO.

Nello studio della piastra di raggio inferiore, il valore della profondità d'influenza  $H$  ottenuto tramite le formule di Charles è il 20% inferiore a quello usato come riferimento. Osservando i grafici dei cedimenti, i risultati differiscono del 20% nel caso di presenza del carico idrostatico, del 22% in condizione di serbatoio vuoto. Per quanto riguarda i momenti, invece, si nota una differenza di comportamento tra il centro della piastra, e la zona perimetrale: nella parte centrale, infatti, si riscontra una discrepanza tra i risultati (di circa il 20% per il serbatoio colmo d'acqua, del 11% per il serbatoio vuoto) mentre ai bordi della piastra i dati coincidono.

## 5.5 – Analisi parametriche

Per completare il lavoro, si esegue infine un'analisi di alterazione dei dati di partenza per ottenere dei valori dei cedimenti doppi (si è preso come riferimento l'abbassamento del punto centrale della piastra). Lo scopo di tale lavoro è ricavare i parametri che portano a questo nuovo risultato; c'è però da sottolineare che le analisi svolte in questa operazione si riferiscono ad una profondità di terreno di 30 metri (mentre quelle esposte nelle pagine precedenti si limitavano ad una profondità di 15 metri). In questo modo si determina il completo cedimento di tutto il volume di terreno soggetto ad una variazione significativa di tensione. La piastra su cui sono state svolte le varie analisi è quella di dimensioni inferiori di raggio 6m.

Il valore del modulo elastico di partenza è stato fornito dall'analisi elastica del modello tridimensionale: se con un modulo elastico costante di 13000 kPa per una profondità di terreno di 30 m si è ottenuto un abbassamento del centro della piastra di 4.8cm, per ottenere un cedimento doppio (circa 9.5cm) è risultato necessario impostare un modulo elastico di 6500 kPa. Questo valore di E è stato poi usato come dato di partenza per gli altri modelli. In particolare, per il modello MK-R di Horvath, il modulo elastico di 6500 è stato associato ad una profondità di influenza di 10.2m. L'unico modello in cui il modulo elastico E non è necessario è quello di Winkler dove l'unico parametro da cambiare è il coefficiente di reazione del terreno " $k$ ": nel caso specifico per ottenere un cedimento doppio si è passati da un valore di  $k$  di 1350 kPa/m a 650 kPa/m. In definitiva, le successive tabelle presentano i dati dei cedimenti e dei momenti radiali determinati con i seguenti parametri:

	Parametri cedimenti	Parametri DOPPI cedimenti
Modello 3D Analisi Mohr-Coulomb Analisi HS Analisi HSS	E= 13000 kPa	E= 6500 kPa
Modello di Horvath	E= 13000 kPa H=10,8 m	E= 6500 kPa H=10,2 m
Modello di Winkler	k=1350 kPa/m	k=675 kPa/m



	CEDIMENTI (cm)					
	Serbatoio PIENO					
	Modello 3D		Horvath		Winkler	
Distanza dal centro (m)	E=cost=13000kPa 30 m	E=cost=6500kPa 30 m	E= 13000 kPa H=10,8m	E= 6500 kPa H=10,2m	Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)	Modello di Winkler (k=675 kPa/m)
0	-4,8	-9,2	-5	-9,2	-5	-10,2
0,37	-4,8	-9,2	-5	-9,2	-5	-10,2
0,61	-4,8	-9,2	-5	-9,1	-5	-10,2
1,12	-4,7	-9,1	-5	-9,1	-5	-10,2
1,5	-4,7	-9,1	-4,9	-9,1	-5	-10,2
1,78	-4,7	-9	-4,9	-9,1	-5	-10,2
2,39	-4,6	-8,9	-4,9	-9	-5,1	-10,3
2,93	-4,5	-8,8	-4,8	-8,9	-5,1	-10,3
3,56	-4,4	-8,6	-4,7	-8,8	-5,2	-10,4
4,15	-4,3	-8,4	-4,6	-8,8	-5,2	-10,5
4,72	-4,1	-8,2	-4,6	-8,6	-5,3	-10,6
5,34	-4	-8	-4,5	-8,5	-5,4	-10,7
6	-3,8	-7,7	-4,4	-8,4	-5,5	-10,8
6,43	-3,7	-7,5	-4,3	-8,3	-5,5	-10,8

	CEDIMENTI (cm)					
	Serbatoio PIENO					
	MOHR COULOMB		HS		HSS	
Distanza dal centro (m)	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m
0	-3,87	-9,7	-5,46	-10,28	-3,05	-7,28
0,37	-3,87	-9,7	-5,46	-10,27	-3,05	-7,28
0,61	-3,86	-9,7	-5,45	-10,27	-3,04	-7,28
1,12	-3,83	-9,65	-5,43	-10,23	-3,03	-7,25
1,5	-3,8	-9,61	-5,4	-10,21	-3,02	-7,23
1,78	-3,76	-9,57	-5,38	-10,17	-3	-7,21
2,39	-3,68	-9,48	-5,32	-10,09	-2,97	-7,15
2,93	-3,58	-9,38	-5,25	-10	-2,93	-7,09
3,56	-3,45	-9,23	-5,16	-9,88	-2,88	-7,01
4,15	-3,3	-9,1	-5,06	-9,75	-2,83	-6,92
4,72	-3,15	-9,1	-4,96	-9,62	-2,77	-6,82
5,34	-2,97	-8,76	-4,84	-9,45	-2,7	-6,71
6	-2,77	-8,57	-4,71	-9,29	-2,63	-6,59
6,43	-2,65	-8,45	-4,63	-9,18	-2,58	-6,51

Tab. 5.19 e 5.20 – Confronto dei cedimenti ottenuti con diversi parametri di partenza (Serbatoio PIENO)

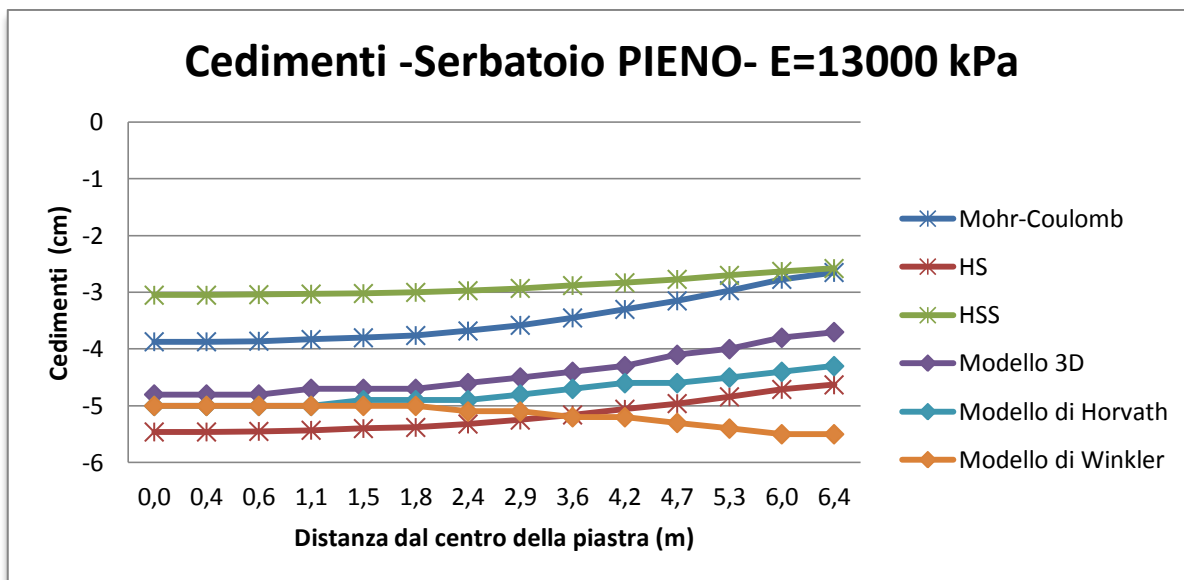


Fig. 5.30 – Grafico dei cedimenti per E=13000 kPa in caso di serbatoio PIENO (profondità del terreno 30m)

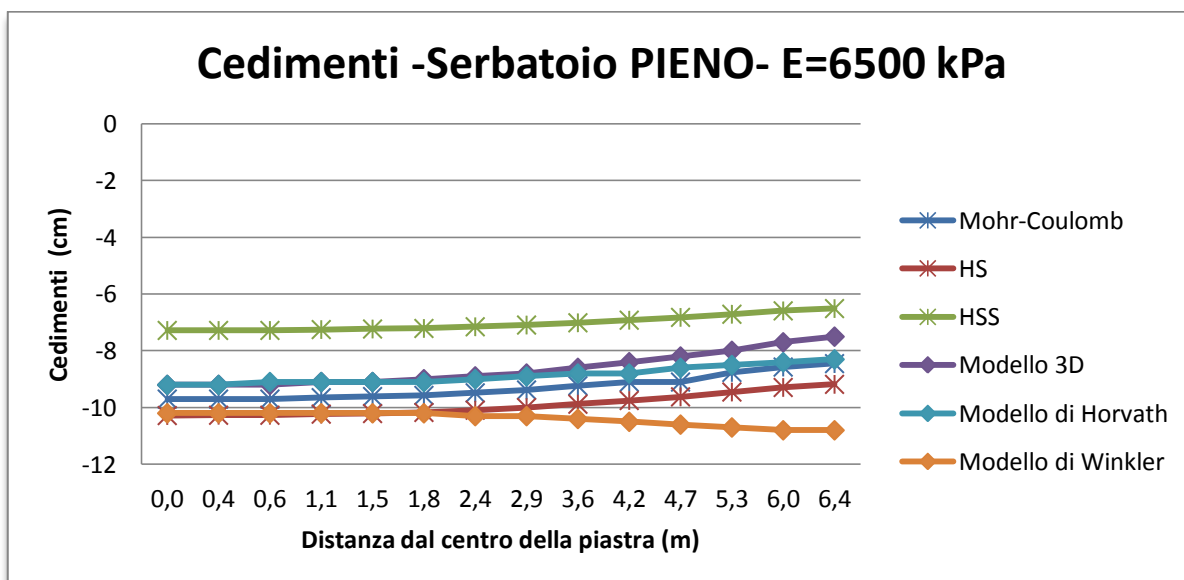


Fig. 5.31 – Grafico dei cedimenti per E=6500 kPa in caso di serbatoio PIENO (profondità del terreno 30m)

Nei grafici dei cedimenti a serbatoio pieno nel caso E=13000 kPa (Fig. 5.30), è visibile una corrispondenza dei risultati delle analisi elastiche (tuttavia, il modello di Winkler presenta il solito andamento di aumento dei cedimenti in prossimità dei bordi delle piastre). Molta differenza, invece, si riscontra con le analisi non lineari: tra l'analisi HS e l'analisi HSS si calcola una differenza del 48%. Anche nel caso dei doppi cedimenti (E=6500kPa, Fig. 5.31) l'analisi HSS si discosta particolarmente dagli altri andamenti più uniti.

Distanza dal centro (m)	CEDIMENTI (cm)					
	Serbatoio VUOTO					
	Modello 3D		Horvath		Winkler	
	E=cost=13000kPa 30 m	E=cost=6500kPa 30 m	E= 13000 kPa H=10,8m	E= 6500 kPa H=10,2m	Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)	Modello di Winkler (k=675 kPa/m)
0	-1	-2,1	-0,9	-1,9	-0,8	-2,2
0,37	-1	-2,1	-0,9	-1,9	-0,8	-2,2
0,61	-1	-2,1	-0,9	-2	-0,8	-2,2
1,12	-1	-2,1	-0,9	-2	-0,9	-2,3
1,5	-1	-2,1	-0,9	-2	-0,9	-2,3
1,78	-1	-2,1	-0,9	-2	-0,9	-2,4
2,39	-1	-2,1	-1	-2,1	-1	-2,5
2,93	-1,1	-2,2	-1	-2,2	-1,1	-2,6
3,56	-1,1	-2,2	-1,1	-2,3	-1,3	-2,8
4,15	-1,1	-2,2	-1,2	-2,4	-1,4	-3
4,72	-1,1	-2,3	-1,3	-2,5	-1,6	-3,1
5,34	-1,2	-2,3	-1,4	-2,6	-1,8	-3,4
6	-1,2	-2,4	-1,5	-2,8	-2	-3,6
6,43	-1,2	-2,4	-1,6	-2,9	-2,1	-3,8

Distanza dal centro (m)	CEDIMENTI (cm)					
	Serbatoio VUOTO					
	MOHR COULOMB		HS		HSS	
	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m
0	-1,06	-2,2	-0,81	-1,56	-0,17	-0,42
0,37	-1,06	-2,2	-0,81	-1,56	-0,17	-0,42
0,61	-1,06	-2,2	-0,81	-1,56	-0,17	-0,43
1,12	-1,07	-2,21	-0,83	-1,58	-0,18	-0,44
1,5	-1,08	-2,22	-0,84	-1,6	-0,18	-0,46
1,78	-1,08	-2,23	-0,85	-1,62	-0,19	-0,48
2,39	-1,1	-2,26	-0,88	-1,66	-0,21	-0,52
2,93	-1,12	-2,29	-0,92	-1,72	-0,24	-0,58
3,56	-1,15	-2,33	-0,98	-1,79	-0,27	-0,66
4,15	-1,18	-2,38	-1,04	-1,87	-0,32	-0,74
4,72	-1,22	-2,43	-1,1	-1,96	-0,37	-0,84
5,34	-1,26	-2,5	-1,18	-2,07	-0,43	-0,95
6	-1,31	-2,56	-1,27	-2,18	-0,5	-1,07
6,43	-1,35	-2,61	-1,32	-2,26	-0,55	-1,15

Tab. 5.21 e 5.22 – Confronto dei cedimenti ottenuti con diversi parametri di partenza (Serbatoio VUOTO)

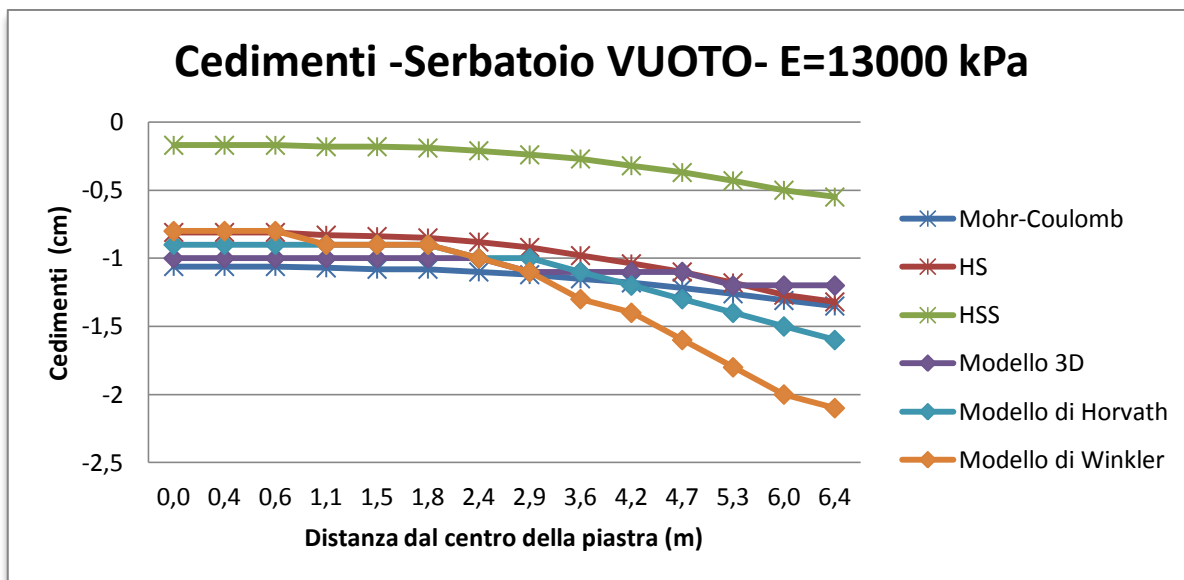


Fig. 5.32 – Grafico dei cedimenti per E=13000 kPa in caso di serbatoio VUOTO (profondità del terreno 30m)

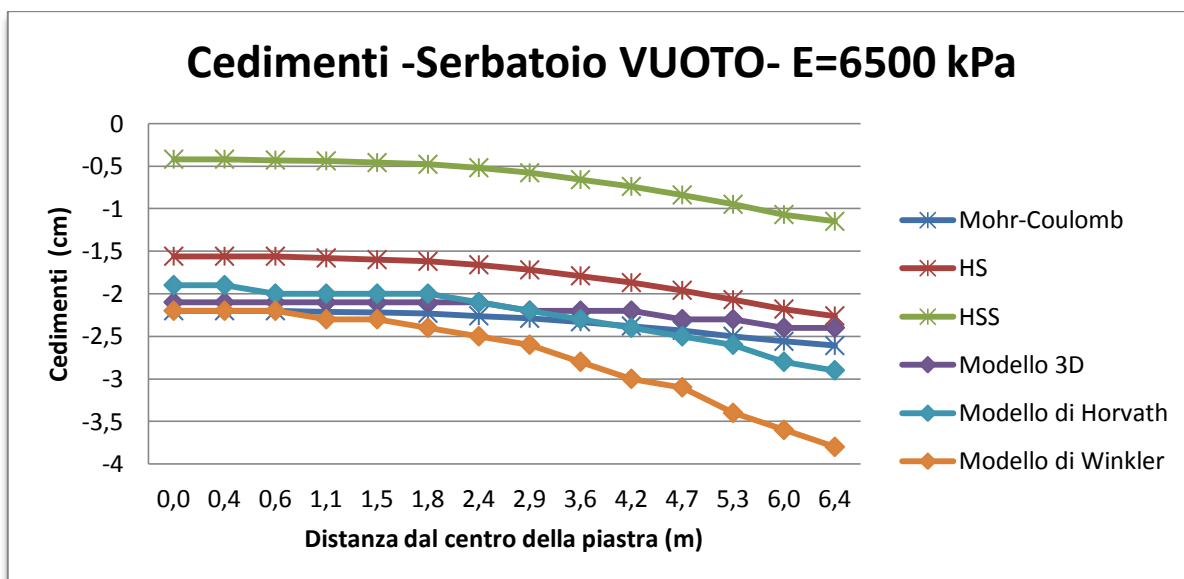


Fig. 5.33 – Grafico dei cedimenti per E=6500 kPa in caso di serbatoio VUOTO (profondità del terreno 30m)

Si noti dai grafici la grande differenza nei valori dei cedimenti registrata dall'analisi non lineare HSS. In entrambi i casi (E=13000 kPa e E=6500 kPa, Fig. 5.32 e Fig. 5.33), i modelli 3D, di Horvath, le analisi Mohr-Coulomb e HS hanno andamenti molto simili e valori di cedimenti analoghi. Il modello di Winkler presenta il solito aumento dei cedimenti nelle zone perimetrali delle piastre.

Distanza dal centro (m)	MOMENTI (kNm/m)					
	Serbatoio PIENO					
	Modello 3D		Horvath		Winkler	
	E=cost=13000kPa 30 m	E=cost=6500kPa 30 m	E= 13000 kPa H=10,8m	E= 6500 kPa H=10,2m	Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)	Modello di Winkler (k=675 kPa/m)
0,185	<b>52,9</b>	<b>83,23</b>	<b>36,026</b>	<b>43,87</b>	-26,433	-32,079
0,49	52,413	82,53	35,635	43,4	<b>-26,716</b>	<b>-32,306</b>
0,865	51,98	81,37	35,367	42,88	-26,413	-31,81
1,31	51,262	79,59	34,729	41,89	-26,031	-31,152
1,64	50,496	77,75	33,948	40,74	-25,64	-30,488
2,085	48,88	74,13	32,254	38,38	-24,816	-29,168
2,66	46,28	68,59	29,503	34,69	-23,461	-27,111
3,245	42,51	61,23	25,556	29,66	-21,454	-24,299
3,855	37,43	52,04	20,229	23,17	-18,653	-20,652
4,435	31,188	41,66	13,649	15,53	-15,054	-16,289
5,03	23,3	29,57	5,425	6,35	-10,146	-10,725
5,67	14,084	16,43	-0,938	-0,725	-3,343	-3,471
6,07	8,103	8,435	-2,044	-2,12	0,969	1,003
6,21	4,25	4,56	-0,279	-0,381	1,185	1,222
6,355	2,137	2,286	-0,369	0,317	0,44	0,456

Distanza dal centro (m)	MOMENTI (kNm/m)					
	Serbatoio PIENO					
	MOHR COULOMB		HS		HSS	
	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m
0,185	<b>47,3</b>	<b>66,13</b>	<b>43,07</b>	<b>56,9</b>	<b>24,1</b>	<b>39,14</b>
0,49	47,1	65,7	42,8	56,49	23,95	38,89
0,865	46,53	64,63	42,23	55,64	23,55	38,38
1,31	45,41	62,5	41,01	54,11	22,83	37,31
1,64	44,35	60,16	39,87	52,59	22,1	36,34
2,085	42,51	57	37,9	50	20,8	34,63
2,66	39,1	51,3	34,42	45,27	19,12	32
3,245	34,97	44,31	30,15	39,93	16,81	28,62
3,855	29,66	36,1	25,03	33,38	14,08	24,52
4,435	23,8	27,77	19,76	26,6	11,31	20,15
5,03	17	18,97	14,08	19,16	8,51	15,2
5,67	10,31	11,18	8,92	11,82	6,44	10,28
6,07	8,04	8,51	7,36	9,25	6,47	8,32
6,21	4,35	5,1	4,85	5,74	4,36	5,43
6,355	0,633	0,67	0,6	0,59	0,58	0,32

Tab. 5.23 e 5.24 – Confronto dei momenti ottenuti con diversi parametri di partenza (Serbatoio PIENO)

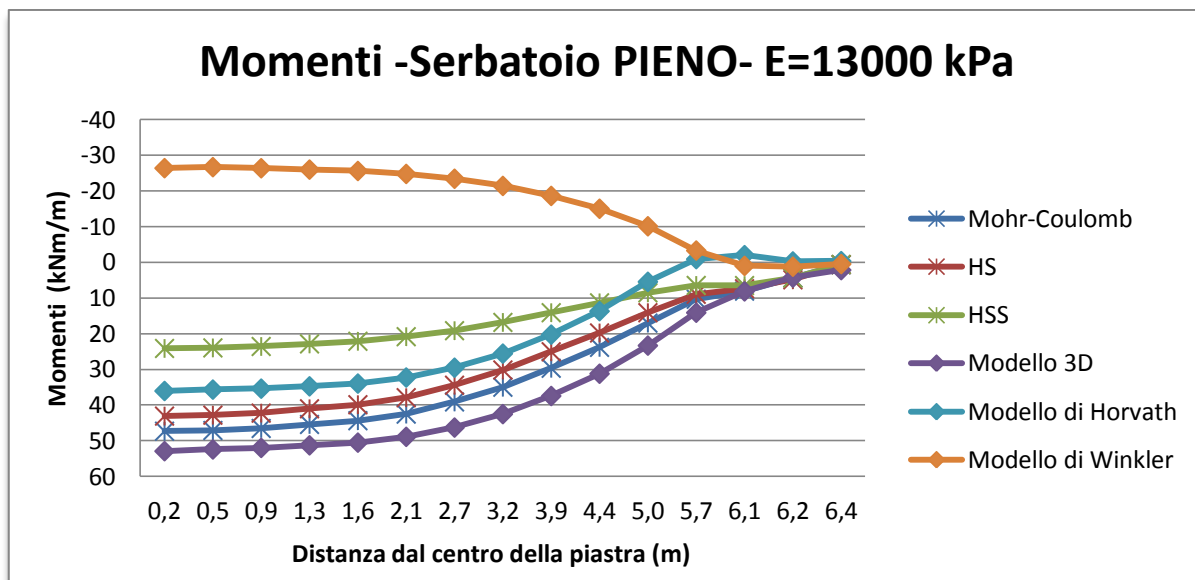


Fig. 5.34 – Grafico dei momenti per E=13000 kPa in caso di serbatoio PIENO (profondità del terreno 30m)

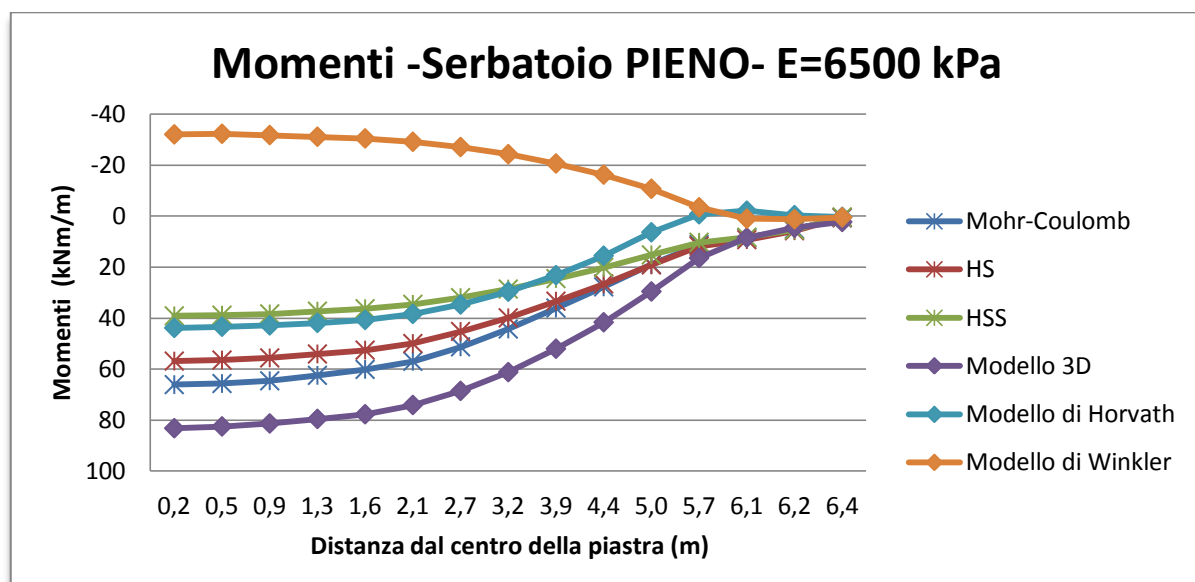


Fig. 5.35 – Grafico dei momenti per E=6500 kPa in caso di serbatoio PIENO (profondità del terreno 30m)

Il modello di Winkler presenta l'unico andamento che si discosta completamente dagli altri (come già notato nei risultati precedenti). Gli altri modelli, pur avendo un trend simile, registrano valori di momento radiale molto diversi: si noti, per esempio, in entrambi i casi la grande differenza tra i risultati dell'analisi HSS e quelli ottenuti dal modello tridimensionale (raggiunge il 50% ).

Distanza dal centro (m)	MOMENTI (kNm/m)					
	Serbatoio VUOTO					
	Modello 3D		Horvath		Winkler	
	E=cost=13000kPa 30 m	E=cost=6500kPa 30 m	E= 13000 kPa H=10,8m	E= 6500 kPa H=10,2m	Modello di Winkler (k=1350 kPa/m)	Modello di Winkler (k=675 kPa/m)
0,185	-8,79	-15	<b>-35,103</b>	<b>-46,034</b>	<b>-63,374</b>	<b>-76,96</b>
0,49	-8,88	-15,05	-35,088	-45,93	-63,276	-76,73
0,865	-9,05	-15,09	-34,886	-45,44	-62,766	-75,76
1,31	-9,28	-15,13	-34,588	-44,72	-61,999	-74,33
1,64	-9,05	<b>-15,17</b>	-34,265	-43,98	-61,179	-72,86
2,085	-9,85	-15,14	-33,55	-42,48	-59,42	-69,91
2,66	-10,23	-14,97	-32,328	-40,137	-56,491	-65,29
3,245	<b>-10,39</b>	-14,43	-30,431	-36,87	-52,09	-58,96
3,855	-10,08	-13,28	-27,676	-32,597	-45,878	-54,26
4,435	-8,94	-11,26	-23,988	-27,391	-37,814	-40,8
5,03	-6,23	-7,62	-18,603	-20,487	-26,712	-28,12
5,67	-0,466	-0,98	-9,097	-9,67	-11,202	-11,51
6,07	3,75	3,684	-1,669	-1,66	-1,033	-0,952
6,21	2,5	2,465	0,337	0,373	0,643	0,732
6,355	1,238	1,2	0,444	0,456	0,409	0,448

Distanza dal centro (m)	MOMENTI (kNm/m)					
	Serbatoio VUOTO					
	MOHR COULOMB		HS		HSS	
	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m	E= 13000 kPa 30m	E= 6500 kPa 30m
0,185	-10,82	-17,76	-21,97	<b>-31,92</b>	-11,8	-30,2
0,49	-10,9	-17,78	-22,03	-31,91	-12,12	-30,44
0,865	-11,08	-17,84	-22,15	-31,86	-12,69	-30,89
1,31	-11,41	-17,92	-22,37	-31,82	-13,86	-31,71
1,64	-11,7	-17,98	-22,54	-31,69	-14,84	-32,34
2,085	-12,1	<b>-18</b>	-22,7	-31,43	-16,46	-33,1
2,66	-12,7	-17,94	<b>-22,8</b>	-30,64	-18,59	<b>-33,28</b>
3,245	<b>-13,19</b>	-17,5	-22,33	-29,03	-20,06	-32,18
3,855	-13,11	-16,4	-20,86	-26,23	<b>-20,26</b>	-29,33
4,435	-12,1	-14,39	-18,08	-22,1	-18,51	-24,74
5,03	-9,47	-10,64	-13,04	-15,59	-14,02	-17,5
5,67	-3,5	-3,74	-4,64	-5,72	-5,53	-6,7
6,07	2,84	2,93	2,65	2,39	2,15	1,96
6,21	3,04	3,15	3,2	2,97	2,7	2,7
6,355	0,815	0,854	0,81	0,86	0,54	0,67

Tab. 5.25 e 5.26 – Confronto dei momenti ottenuti con diversi parametri di partenza (Serbatoio VUOTO)

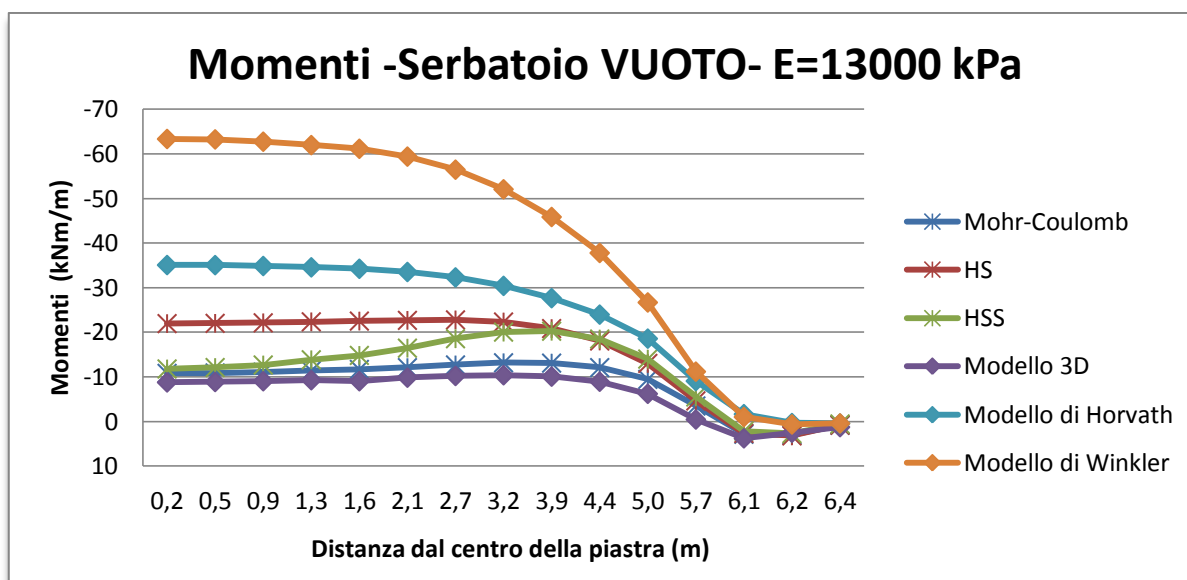


Fig. 5.36 – Grafico dei momenti per E=13000 kPa in caso di serbatoio VUOTO (profondità del terreno 30m)

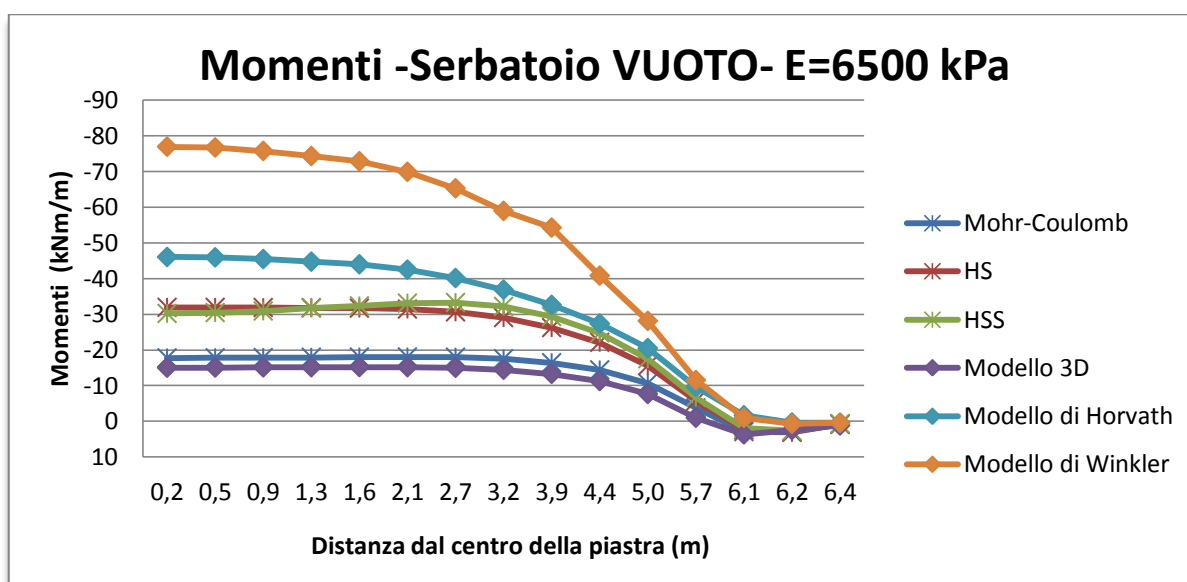


Fig. 5.37 – Grafico dei momenti per E=13000 kPa in caso di serbatoio VUOTO (profondità del terreno 30m)

Il trend dei risultati in entrambi i casi è il medesimo, varia l'entità dei momenti. Nel caso E=6500 kPa, le analisi HS e HSS sono comparabili; nel caso E=13000 kPa esse differiscono nella parte centrale della piastra per poi convergere nella zona perimetrale. Nei due casi rappresentati dalle Figure 5.36, 5.37, le maggiori differenze si riscontrano tra i risultati delle analisi elastiche (escludendo il modello di Winkler, tra il modello tridimensionale e quello di Horvath è presente una differenza del 67%). Nel caso del doppio cedimento (Fig. 5.37), al centro della piastra i valori delle analisi HS e HSS sono maggiori del 42% di quelli dell'analisi Mohr-Coulomb.



## Capitolo 6: Confronto tra i risultati.

### 6.1 - Rigidezza adimensionale relativa piastra-terreno

---

Dopo aver analizzato i risultati delle singole analisi sia in campo elastico, che in quello elasto-plastico, rimane il problema di determinare quali tra queste si avvicinano maggiormente al più probabile comportamento del terreno. La risposta a questo quesito non è facile. Per un generale uso dei risultati si è ritenuto essenziale esporli in forma adimensionale; a tale scopo si è utilizzata la formula proposta da P.T. Brown della rigidezza adimensionale relativa piastra-terreno K:

$$K = \frac{E_p}{E'} (1 - \nu^2) \left( \frac{t}{r} \right)^3 \quad (1)$$

dove:

K = rigidezza adimensionale relativa piastra-terreno

$E_p$  = modulo di elasticità della piastra

$E'$  = modulo di elasticità del terreno

t = spessore della piastra

r = raggio della piastra

La formula di Brown (1) fa riferimento alle piastre circolari con carico uniformemente distribuito. Per rendere comparabili i risultati ottenuti nel capitolo 5, si è presa come riferimento la piastra più piccola di raggio 6m, nei due casi di  $E=13000$  kPa e  $E'=6500$  kPa; inoltre, avendo i risultati della piastra di raggio 16m su terreno di  $E'=13000$  kPa ( $\Rightarrow K=0.0146$ ), per utilizzarli con la piastra di raggio inferiore, si è dovuto mantenere lo stesso K, variando di conseguenza lo spessore della piastra (da 30 a 14 cm). Questi, in definitiva, i casi confrontati:

$E'$	r	t	K	
$E'=13000$ kPa	r=6m	0,14 m	0,014603	→K1
	r=6m	0,3 m	0,276923	→K2
$E'=6500$ kPa	r=6m	0,3 m	0,553846	→K3

Definiti i valori adimensionali nei vari casi, vengono confrontati gli andamenti dei cedimenti e dei momenti massimi in presenza di pressione idrostatica e dei momenti minimi a serbatoio vuoto tra i vari modelli analizzati.

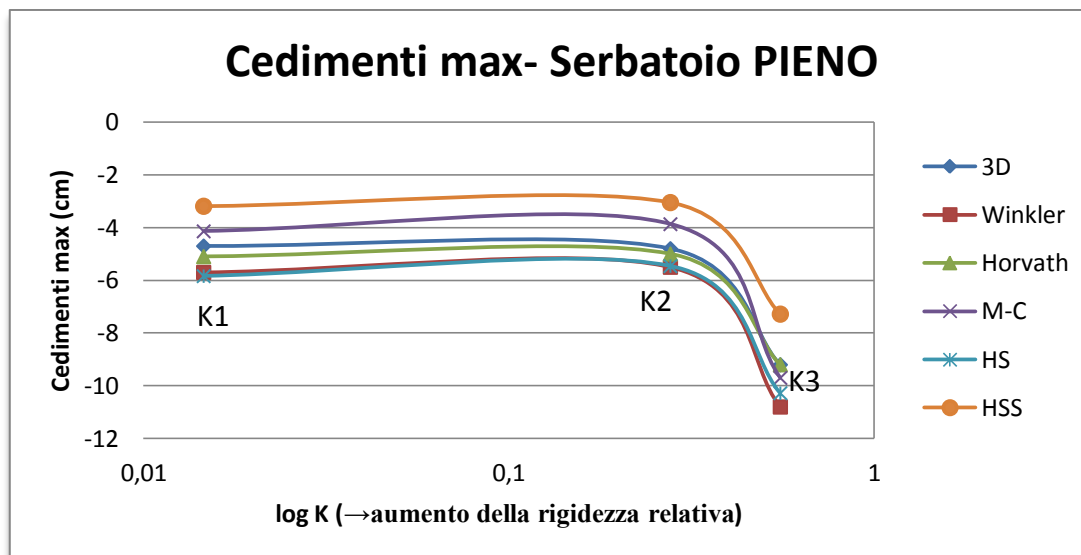


Fig. 6.1 – Andamenti dei cedimenti massimi ottenuti a serbatoio PIENO

In Fig. 6.1 sono rappresentati i cedimenti massimi ottenuti a serbatoio pieno in funzione dei valori di K ottenuti. K1 e K2 rappresentano i valori adimensionali su un terreno di  $E' = 13000 \text{ kPa}$  delle piastre di raggio 6m e diverso spessore. K3, invece, fa riferimento ad un terreno meno rigido, di  $E' = 6500 \text{ kPa}$  (sempre per la piastra da 6m). Dalla figura è visibile un trend tra i vari modelli che dipende principalmente dalla compressibilità del terreno.

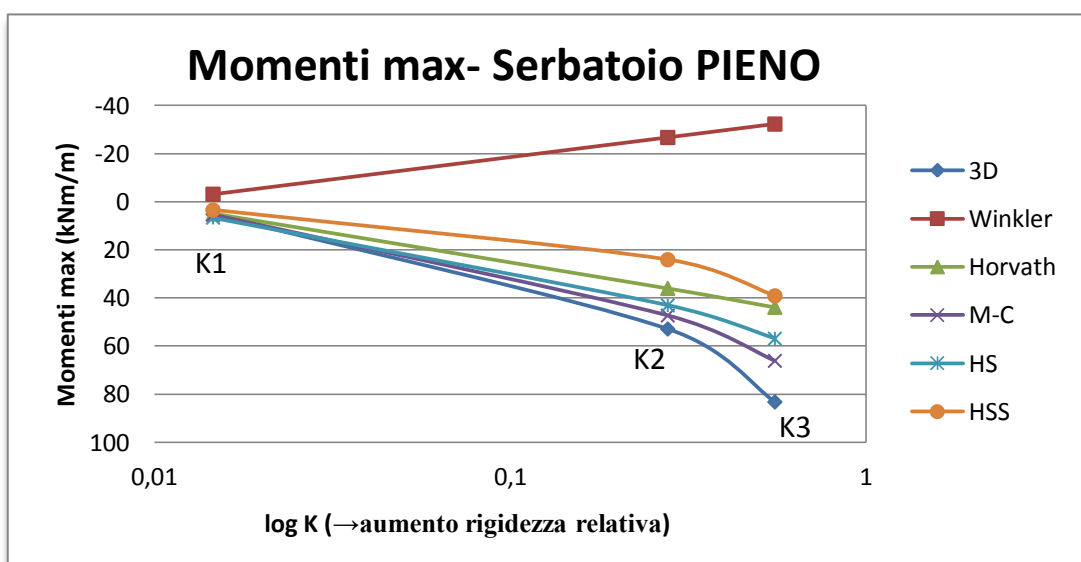


Fig. 6.2 – Andamenti dei momenti massimi ottenuti a serbatoio PIENO

Passando all'analisi dei momenti massimi ottenuti in presenza di carico idrostatico, si osserva in Fig. 6.2 un trend comparabile tra tutti i modelli tranne per quello di Winkler: questo perché, come già spiegato precedentemente, il modello di Winkler non riconosce il carico distribuito nella piastra e i momenti ottenuti derivano dal carico lineare perimetrale del muro esterno. Tuttavia, anche con i risultati di Winkler, diminuendo la rigidezza (K3, linea rossa) il valore del momento massimo (in modulo) aumenta.

In Fig. 6.3 è rappresentato il grafico dei momenti minimi ottenuti nei vari modelli in caso di serbatoio vuoto. Il trend tra i vari modelli sembra simile anche in questa immagine; si nota però nell'analisi di Mohr-Coulomb e nel 3D che i valori dei cedimenti minimi sono quasi equivalenti per K1, K2 e K3: non si registra infatti un aumento dei momenti (in modulo) significativo quando la rigidezza diminuisce ( $E'=6500$ ) come invece avviene per i modelli di Winkler, di Horvath, HS e HSS.

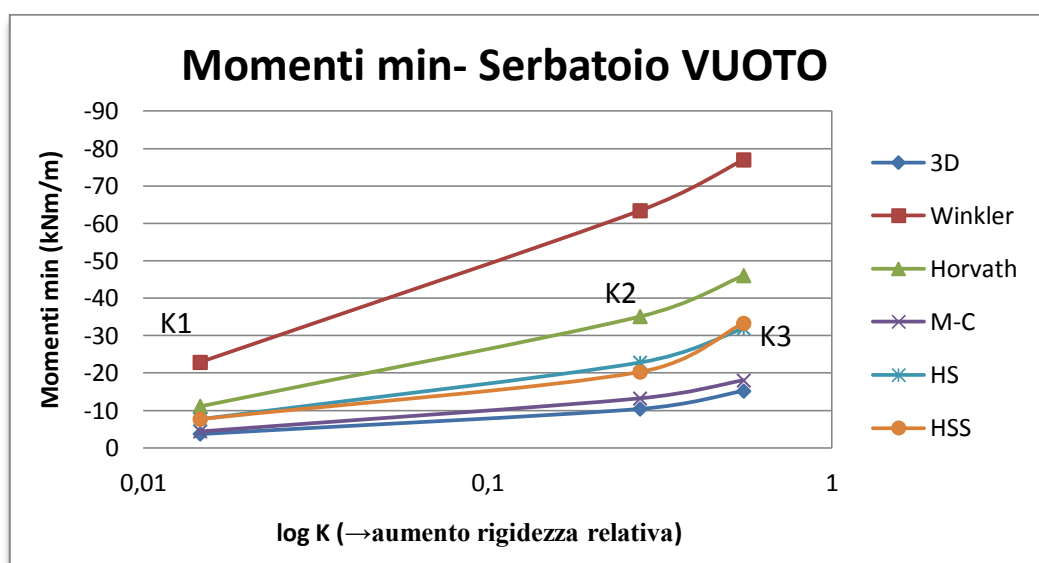


Fig. 6.3 – Andamenti dei momenti minimi ottenuti a serbatoio VUOTO

Nei tre grafici delle Fig. 6.1, 6.2 e 6.3 gli andamenti studiati sono conformi nella maggior parte dei casi. Il trend che più si discosta dagli altri si registra nei momenti massimi in presenza di pressione idrostatica con il modello di Winkler (Fig. 6.2, linea rossa); ciò non accade con il serbatoio vuoto in quanto non è presente il carico uniformemente distribuito che quel preciso modello non sa riconoscere.

## 6.2 – Considerazioni finali

Sarebbe d'aiuto a questo punto avere dei dati provenienti da misurazioni di casi reali di fondazioni superficiali per capire quali tra i risultati parametrici ottenuti in questo lavoro maggiormente si avvicinano al più probabile comportamento del terreno. Purtroppo, la ricerca di tali dati ha portato ad un unico esempio di una struttura metallica e quindi infinitamente flessibile; si tratta delle misurazioni registrate lungo il diametro dei serbatoi realizzati per la centrale termoelettrica di Porto Tolle, situata sul delta del Po. L'articolo di riferimento ha titolo: "Yelding from Field Behavior and its Influence on Oil Tank settlements" di Riccardo Berardi e Renato Lancellotta. Viene riportato unicamente il grafico dei cedimenti misurati durante il monitoraggio durato 5 anni.

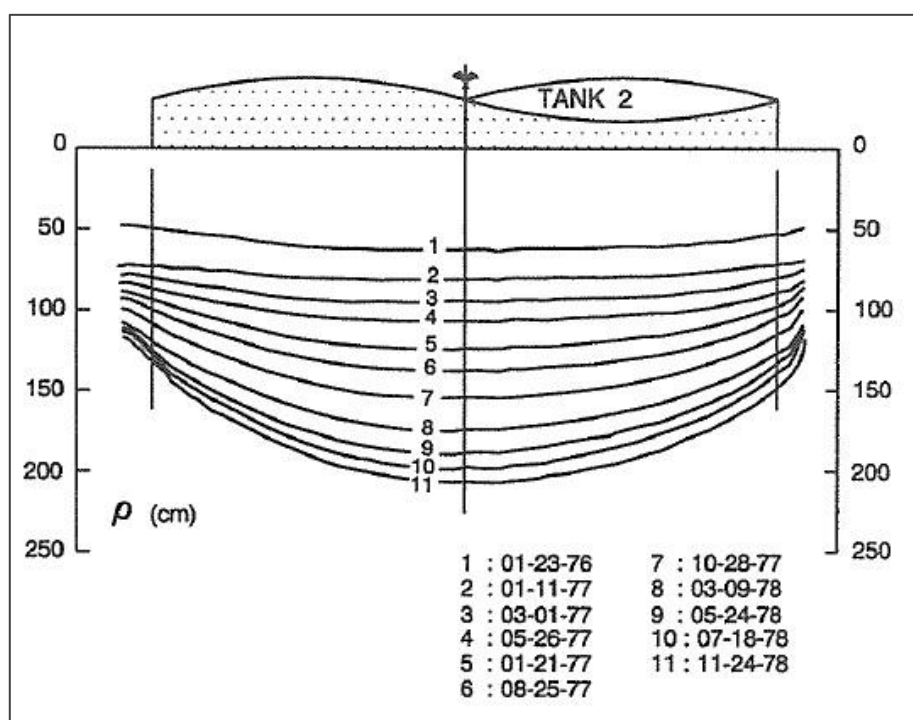


Fig. 6.4 – Cedimenti del serbatoio dell'impianto di Porto Tolle ottenuti dal monitoraggio

Si noti come il cedimento nella zona centrale della struttura sia maggiore rispetto ai bordi. Nella misurazione finale (numero 11, effettuata nel 1978) l'abbassamento centrale registra un valore oltre i 2 metri, ai bordi, invece, 1.5 metri. Più che il valore numerico, è importante evidenziare l'andamento dei cedimenti lungo il diametro dell'intera struttura. Questo dimostra che al di sotto della zona centrale avviene un cedimento di tipo edometrico mentre ai bordi si verificano degli effetti di plasticizzazione che limitano in maniera significativa i cedimenti nella zona perimetrale.

Partendo da questa considerazione, si deduce che i risultati ottenuti dal modello di Winkler sono

quelli che più si allontanano da questo andamento. Si prendano, ad esempio i risultati dei cedimenti ottenuti in presenza di carico idrostatico: sia nella piastra di raggio maggiore (Tab. 5.2 / Fig. 5.9) che per quella minore (Tab. 5.8 / Fig. 5.14) i cedimenti ai bordi risultano addirittura superiori a quelli centrali del 16% (nella piastra di dimensioni maggiori). Nel caso di serbatoi vuoti, i cedimenti ai bordi sono i valori più alti tra tutti i modelli (Fig. 5.10, 5.15). Inoltre, i momenti registrati dal modello di Winkler in caso di serbatoio pieno fanno riferimento al solo carico lineare perimetrale del muro esterno mentre l'effetto del carico uniformemente distribuito dovuto alla presenza dell'acqua non viene considerato.

Il modello proposto da Winkler è la semplificazione del terreno più utilizzata proprio per la sua semplicità; ma i dati derivanti da questo lavoro dimostrano che, oltre ad essere difficoltosa la determinazione del valore del coefficiente di reazione del terreno  $k$ , fornisce in ogni caso dei risultati non corretti in presenza di carico distribuito.

Risulta assai difficile trovare tra i restanti modelli analizzati, quello che maggiormente si avvicina al più probabile comportamento del terreno. Se limitiamo però la scelta al campo elastico, il modello di MK-R modificato proposto da J. S. Horvath potrebbe essere il giusto compromesso. Quest'ultimo, infatti, è una soluzione ibrido che unisce il comportamento del terreno come mezzo continuo elastico a numerosi elementi meccanici di ausilio (come molle di diversa rigidità e membrane); in questo modo, vengono tenuti in conto gli effetti che si creano ai bordi della fondazione superficiale attraverso la linea aggiuntiva di molle perimetrali di rigidezza  $k_{bc}$ . Inoltre, dagli esiti ottenuti da questo lavoro si nota che il trend dei risultati è sempre stato conforme a quello degli altri modelli (Winkler escluso). Si osservi, però, la differenza tra valori forniti dal modello tridimensionale e da quelli proposti da Horvath, entrambi analizzati in campo elastico. I grafici delle Fig. 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 riassumono i vari dati di entrambi i modelli. Il modello tridimensionale presenta in tutti i vari casi (piastre di entrambe le dimensioni, in presenza o meno di pressione idrostatica) cedimenti ai bordi della fondazione inferiori rispetto al modello di Horvath (fenomeno meno accentuato per la piastra di dimensioni minori). Viene registrata, invece, una relativa distanza tra i valori dei momenti; si osservi, ad esempio, in Fig. 6.6 le curve disegnate in caso di serbatoio vuoto. Nella Fig. 6.8 le differenze tra i due modelli sono ancora più evidenti: in entrambi i casi, la differenza dei momenti al centro della piastra supera il 50%. Per quanto riguarda la modellazione con programmi ad elementi finiti, il modello 3D è sicuramente più difficoltoso e l'analisi impiega molto più tempo (ore intere) mentre la soluzione di Horvath è molto più semplice e l'analisi lineare è praticamente immediata.

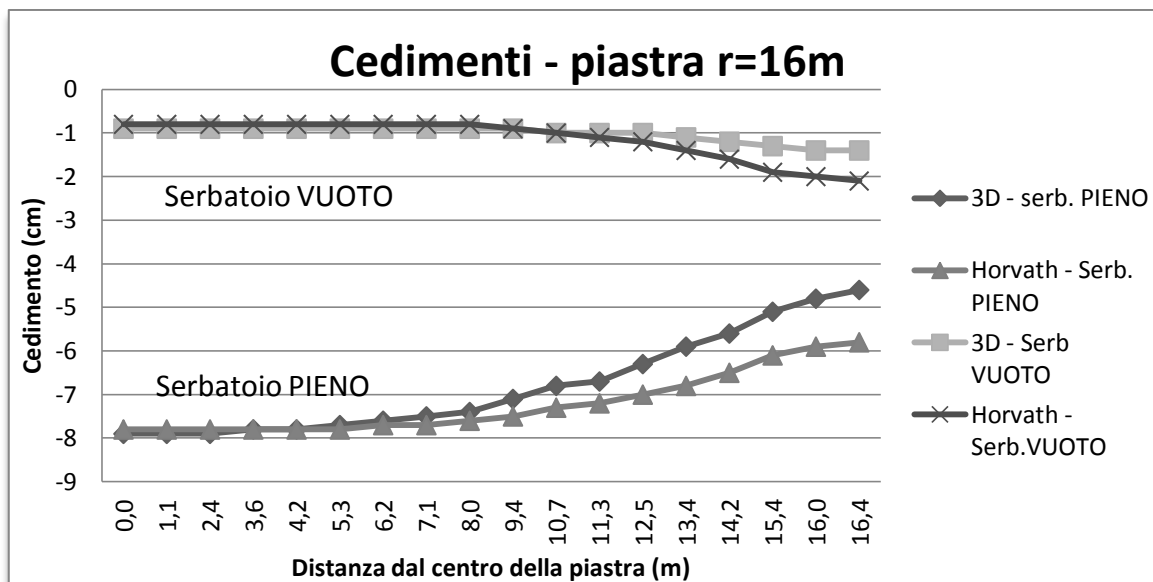


Fig. 6.5 – Confronto tra i cedimenti dei modelli 3D e MK-R (piastra maggiore)

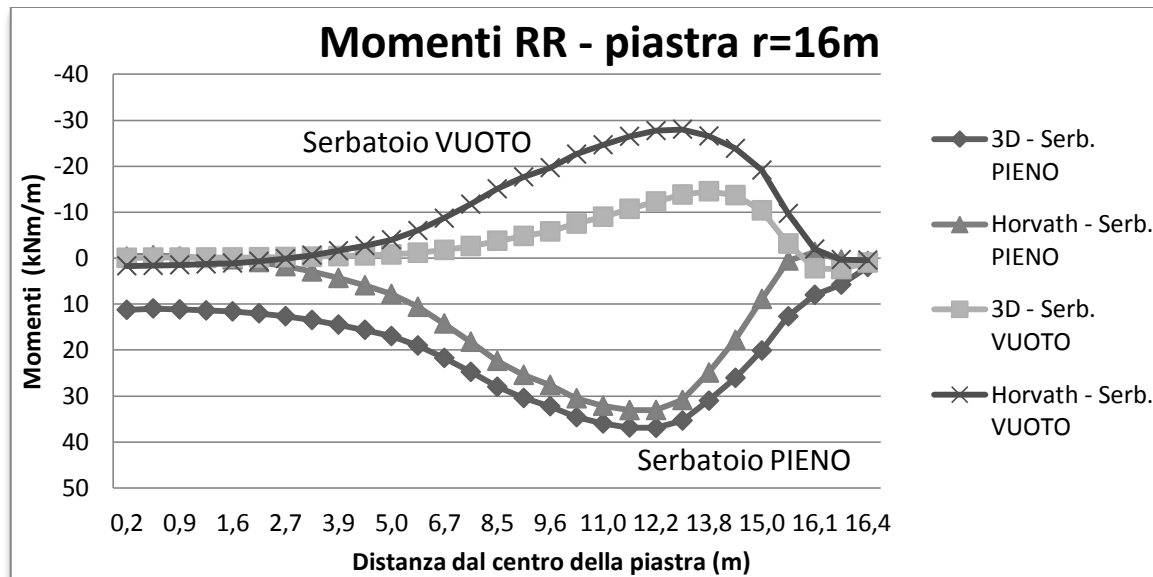


Fig. 6.6 – Confronto tra i momenti radiali dei modelli 3D e MK-R (piastra maggiore)

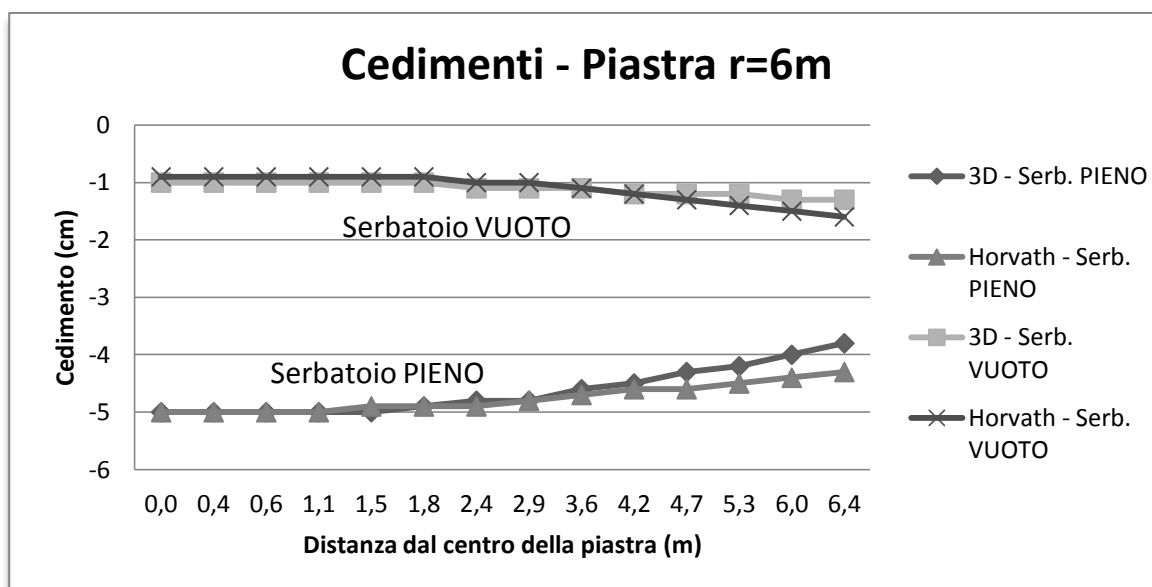


Fig. 6.7 – Confronto tra i cedimenti dei modelli 3D e MK-R (piastra minore)

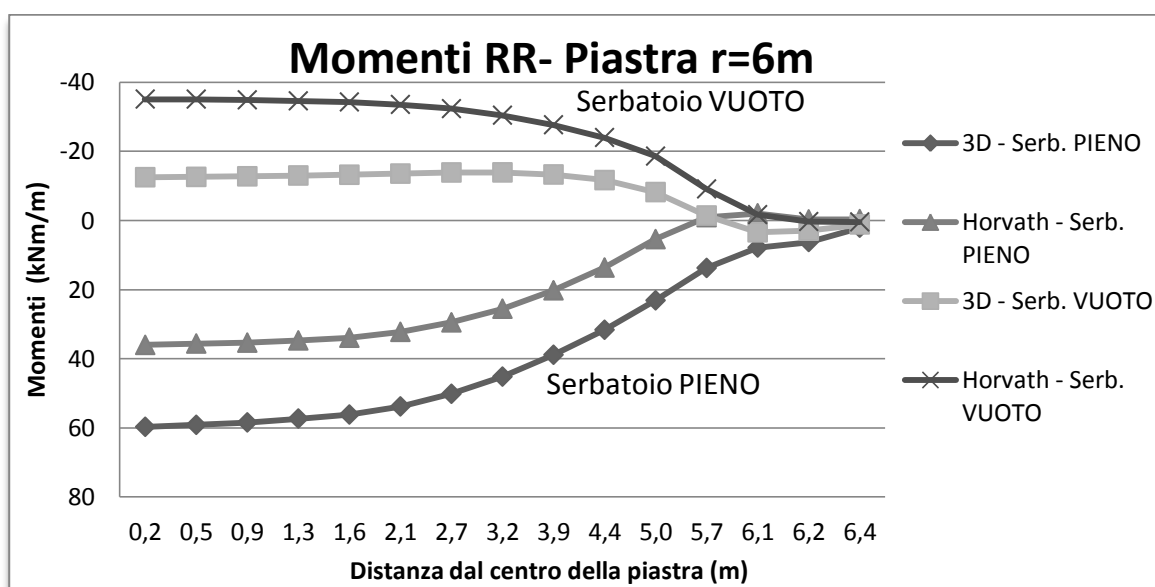


Fig. 6.8 – Confronto tra i momenti radiali dei modelli 3D e MK-R (piastra minore)





# Conclusioni

Partendo da uno studio di interazione terreno-struttura per un'ipotetica progettazione di serbatoi circolari in calcestruzzo su un suolo reale, sono state svolte analisi di diversi modelli di suolo sia in campo elastico, che in quello elasto-plastico. Risulta particolarmente difficile decretare quale tra i 6 modelli studiati sia quello più prossimo al probabile comportamento del terreno, non avendo dati provenienti da casi reali simili; tuttavia possono essere fatte le seguenti considerazioni finali:

- Il modello proposto da Winkler dove il terreno viene assimilato ad un letto di molle elastiche mutuamente indipendenti presenta dei risultati anomali sia nel caso dei cedimenti che dei momenti: ciò è dovuto al fatto che questo preciso modello funziona solo con carichi concentrati. Per questo motivo, nel presente lavoro che prevede un carico uniformemente distribuito dovuto alla presenza dell'acqua, i dati conseguiti sono scorretti.
- Il modello tridimensionale, dove il serbatoio posa su una stratigrafia idealizzata del terreno (partendo dalla relazione geologica del sito reale e dai dati di prove CPT), ha una modellazione difficoltosa in un programma ad elementi finiti e lo svolgimento delle analisi risulta particolarmente lungo; indubbiamente a livello pratico può risultare scomodo.
- Per quanto riguarda l'indagine svolta in campo elasto-plastico, l'analisi HSS risulta la meno cautelativa: per entrambe le dimensioni delle piastre, i dati dei cedimenti sono i minori tra tutti gli altri ottenuti (anche nella zona centrale); lo stesso vale per i momenti, registrando, appunto, i valori dei momenti radiali (in modulo) tra i più bassi (nel caso più gravoso, ovvero in presenza di acqua).
- Il modello Kerr-Reissner Modificato proposto da J. S. Horvath è sicuramente il compromesso tra le soluzioni (almeno in campo elastico). La sua facilità di modellazione, il fatto che tenga conto di maggiori parametri del terreno, l'attenzione verso la zona in prossimità dei bordi della fondazione con il posizionamento di molle speciali nel perimetro, la velocità di esecuzione delle analisi, il giusto funzionamento anche in presenza di carichi distribuiti, il trend dei risultati conforme a tutti i modelli studiati (Winkler escluso) fa di questo modello un potenziale valido sostituto al diffusissimo modello proposto da Winkler. La parte delicata, per questo modello, è la determinazione della zona della profondità di influenza  $H$ . Come dimostrato nel capitolo 5, sono ammessi errori nella valutazione di  $H$  di  $\pm 10\%$ , oltre i quali i valori dei momenti differirebbero dal momento "giusto" di oltre l'8%.



# Bibliografia

- D. Daniel Thangaraj e K. Ilamparuthi, “Parametric Study on the Performance of Raft Foundation with Interaction of Frame”, articolo;
- K. Horikoshi e M.F. Randolph, “On the definition of raft-soil stiffness ratio for rectangular rafts”, articolo, 1997;
- J. Colasanti e John S. Horvath, “Practical Subgrade Model for Improved Soil-Structure Interaction Analysis: Software Implementation”, articolo, Novembre 2010;
- John S. Horvath, “New Subgrade Model Applied to Mat Foundations”, articolo;
- Paul W. Mayne e Harry G. Poulos, “Approximate Displacement Influence Factors for Elastic Shallow Foundations”, articolo pubblicato nel Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, giugno 1999;
- Leonidas T. Stavridis, “Rigid Foundations Resting on an Elastic Layered Soil”, articolo pubblicato on line, settembre 2008;
- E. S. Melerski, “Simple computer analysis of circular raft under various axisymmetric loading and elastic foundation conditions”, articolo, 1990;
- J. Neil Kay e Richard L. Cavagnaro, “Settlement of Raft Foundations”, articolo, 1984;
- Sasha D. Milovic, “A comparison between observed and calculated large settlements of raft foundations”, articolo, 1997;
- Claudio Comastri, Elisa Maniezzo e Paola Zogno, “Affidabilità del modello di Winkler” (parte 1 e 2), articolo 2004;
- R. J. Jardine, D. M. Potts, A. B. Fourie e J. B. Burland, “Studies of the influence of non-linear stress-strain characteristics in soil-structure interaction”, articolo, 1987;
- E. Shultze e G. Sherif, “Prediction of settlements from evaluated settlement observations for sand”, articolo;
- J. A. Charles, “The depth of influence of loaded areas”, articolo, Febbraio 1994;
- J. B. Burland, “Small is beautiful – the stiffness of soils at small strains”, articolo, Giugno 1989;
- S. Buttling e L. A. Wood, “A failed raft foundation on soft clays – investigation and analysis”, articolo;
- J. A. Hooper, “Non-linear analysis of a circular raft on clay”, articolo, 1983;
- John S. Horvath e J. Colasanti, “New Hybrid Subgrade Model for Soil-Structure Interaction Analysis: Foundation and Geosynthetics Applications”, articolo, Marzo 2011;
- J. Colasanti e John S. Horvath, “Practical Subgrade Model for Improved Soil-Structure Interaction Analysis: Parameter Assessment”, articolo, Gennaio 2011;
- J. Colasanti e John S. Horvath, “Practical Subgrade Model for Improved Soil-Structure Interaction Analysis: Model Development”, articolo, Novembre 2010;

- Paul W. Mayne, “Unexpected but foreseeable mat settlements on Piedmont residuum”, articolo, 2010;
- J. P. Giroud, “Tassament d’une foundation circulaire”, articolo, 1971;
- H. Denver, “Settlement of Raft Foundations”, articolo;
- Riccardo Berardi e Renato Lancellotta, “Yelding from Field Behavior and its Influence on Oil Tank settlements”, articolo, 2002

# Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare al Professor Cortellazzo che mi ha seguita con tanta pazienza per l'intero sviluppo della tesi permettendomi di risolvere molti problemi e per l'attenzione dedicata ad entrambe le mie tesi. Inoltre, vorrei esprimere la mia sincera gratitudine ai miei compagni di corso, in particolare a Francesca e Stefano per gli infiniti aiuti e consigli non tanto in questa fase finale, ma durante il percorso universitario che abbiamo affrontato assieme.

Grazie agli zii Lorenzo e Gabriella, per avermi regalato un'opportunità tanto grande. Questa laurea è divisa esattamente in tre parti uguali, è una Nostra Enorme Vittoria.

Grazie ai miei fratelli, i miei ometti...le persone che più amo al mondo.

Grazie alla mia amica Sara, l'Amica di una vita, semplicemente per esserci, sempre.

Un grazie a tutti i miei amici per la comprensione del mio classico "No, stasera, no...devo studiare", che mi hanno sostenuto, che hanno gioito con me dei miei successi e consolato nelle delusioni che questo percorso ha portato.

Grazie agli Hey Teacher! per avermi regalato proprio in questi ultimi due anni una nuova passione, che mi ha presentato nuove sfide e fatto scoprire un mondo "spettacolare".

In particolare, ringrazio Giorgio, che oltre ad essere il mio insegnante nell'arte "luciaia", mi ha aiutato tantissimo nei problemi pratici e non, durante la lavorazione di questa tesi...grazie di cuore, Giogin!

E un pensiero va alla mia noni...riesco a sentire il caldo abbraccio e i mille baci che mi stai dando.



## ALLEGATO A:

### Metodo degli Elementi Finiti (FEM) e Analisi agli Elementi finiti (FEA)

Il Metodo degli Elementi Finiti permette di risolvere il problema della determinazione dello stato di sforzo e deformazione in elementi in condizioni di carico per le quali non è ricavabile la soluzione analitica. In questo metodo si discretizza il continuo, che ha infiniti gradi di libertà, con un insieme di elementi di dimensioni finite, tra loro interconnessi in punti predefiniti (nodi). È quindi possibile ridurre il problema statico in un sistema di equazioni algebriche con un numero finito di incognite (gli spostamenti nodali). Nel Metodo degli Elementi Finiti si assume una funzione di spostamento all'interno del singolo elemento, definendo cioè le componenti di spostamento del generico punto come una funzione, ipotizzata nota, degli spostamenti dei nodi: il problema, con tale assunzione, passa dal dominio continuo al dominio discreto visto che le nuove incognite sono gli spostamenti nodali. Una volta noti gli spostamenti nodali è immediato il passaggio alle deformazioni e, mediante la matrice di legame sforzi-deformazioni, si passa successivamente al tensore degli sforzi. Benché il metodo FEM competa in alcuni ambiti limitati con altre strategie numeriche (metodo delle differenze finite, metodo dei volumi finiti, metodo degli elementi al contorno, metodo delle celle, metodo spettrale, etc.), esso mantiene una posizione dominante nel panorama delle tecniche numeriche di approssimazione. In generale, il Metodo agli Elementi Finiti si presta molto bene a risolvere equazioni alle derivate parziali quando il dominio ha forma complessa, quando il dominio è variabile, quando l'accuratezza richiesta alla soluzione non è omogenea sul dominio e quando la soluzione cercata manca di regolarità. Esso si applica a corpi fisici che possono essere suddivisi in un certo numero (anche molto grande) di elementi di forma definita e dimensioni contenute. Nel continuo, ogni singolo elemento finito viene considerato un campo di integrazione numerica di caratteristiche omogenee. Questa è la sua caratteristica principale chiamata “discretizzazione”, che avviene attraverso la creazione di una griglia chiamata *mesh* composta da primitive (*elementi finiti*) di forma codificata (per domini 2D: triangoli e quadrilateri; per domini 3D: esaedri e tetraedri). Su ciascun elemento caratterizzato da questa forma elementare, la soluzione del problema è assunta essere espressa dalla combinazione lineare di funzioni chiamate “*shape functions*”, ovvero *funzioni di base* o *funzioni di forma*.

Il modello si sviluppa su due fasi principali, ciascuna delle quali comporta l'inserimento di errori nella soluzione finale:

1. **MODELLAZIONE:** in questa prima fase, si passa dal sistema fisico ad un modello matematico, che isola alcuni aspetti di interesse del sistema fisico, dando maggior attenzione a poche variabili aggregate di interesse e "filtrando" le rimanenti. Se il sistema fisico è complesso, viene suddiviso in sottosistemi. Il sottosistema viene poi suddiviso in elementi finiti ai quali viene applicato un modello matematico. A differenza delle trattazioni analitiche, è sufficiente che il modello matematico scelto sia adeguato alle geometrie semplici degli elementi finiti. L'errore che può portare l'utilizzo di un modello deve essere valutato con prove sperimentali, operazione in genere dispendiosa per tempo e risorse.
2. **DISCRETIZZAZIONE:** questa seconda fase ha lo scopo di ottenere un modello discreto caratterizzato da un numero finito di gradi di libertà: ciò nasce dalla necessità di passare dalla condizione propria del mezzo continuo (che ha numero infinito di gradi di libertà) ad una situazione propria della mesh (di numero finito). L'errore che può derivare da questa fase è dato dalla discordanza con la soluzione esatta del modello matematico.

Il Metodo degli Elementi Finiti lavora per elementi; questi possono essere monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali. I punti precisi che individuano la geometria degli elementi vengono chiamati "nodi". Essi devono essere posizionati anche nei punti e sulle linee di continuità (ad esempio dove cambiano le caratteristiche dei materiali, le caratteristiche delle sezioni) o dove sono applicati dei carichi concentrati o masse nodali. Su ogni nodo dell'elemento viene associato il valore di un campo o gradiente che interessa l'intera struttura; nel caso di elementi meccanici il campo è quello delle reazioni vincolari. I possibili valori che possono assumere i campi o gradienti nei nodi vengono definiti "gradi di libertà" (gdl).

Detto  $\mathbf{f}$  il vettore di forze esterne su un nodo ed  $\mathbf{u}$  il vettore dei gradi di libertà si assume linearità tra  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

dove  $\mathbf{K}$  prende il nome di matrice di rigidezza.

Questa relazione individua la dualità tra forze esterne e spostamenti e permette di trovare la soluzione di un sistema di equazioni, risolte per via numerica dall'elaboratore. Nella sua forma originaria e tutt'ora più diffusa, il Metodo agli Elementi Finiti viene utilizzato per risolvere problemi



poggianti su leggi costitutive di tipo lineare (problemi di sforzi - deformazioni in campo elastico, la diffusione del calore all'interno di un corpo materiale). Alcune soluzioni più raffinate consentono di esplorare il comportamento dei materiali anche in campo fortemente non lineare, ipotizzando comportamenti di tipo plastico o visco-plastico.

Dal FEM, il cui obiettivo è essenzialmente la risoluzione in forma discreta e approssimata di generali sistemi di equazioni alle derivate parziali, si passa poi all' "Analisi agli Elementi Finiti" (FEA).

Questa analisi è una tecnica di simulazione, elaborata attraverso calcolatore elettronico, usata nelle analisi ingegneristiche. La suddivisione del processo di analisi in tre tempi accomuna la grande varietà di programmi di FEA attualmente disponibili. Queste sono usualmente suddivise in:

- 1) PRE-PROCESSING: fase in cui viene costruito il modello ad elementi finiti; in particolare, questa parte iniziale si articola:
  - a) nella scelta del tipo di analisi da effettuare (analisi statica/dinamica/termica, lineare o non lineare/dipendente o meno dal tempo, ecc.);
  - b) nella scelta del tipo di elementi finiti;
  - c) nella definizione dei parametri che caratterizzano il comportamento costitutivo dei materiali;
  - d) nella definizione del reticolo di nodi del problema discreto;
  - e) nella costruzione della discretizzazione ad elementi finiti assegnando per ognuno i nodi a cui essi fanno riferimento;
  - f) applicando le condizioni di vincolo e di carico.
- 2) PROCESSING: è l'analisi vera e propria, con risoluzione del problema agli elementi finiti;
- 3) POST-PROCESSING: fase di elaborazione e rappresentazione della soluzione sia nelle quantità fondamentali, rappresentate direttamente in forma discreta nel metodo FEM (per esempio, gli spostamenti in ambito strutturale) sia delle quantità da esse derivate, importanti nella fisica del problema analizzato (per esempio le tensioni, in un approccio compatibile in problemi strutturali).

Le analisi agli elementi finiti danno la possibilità di trattare problemi definiti su geometrie complesse (punto forte dei metodi FEM) relativi ad una grande varietà di problemi ingegneristici e di esaminare problemi con complesse condizioni di vincolo e/o di carico. Il problema, invece, sono gli errori dovuti all'approssimazione: sono gli errori di discretizzazione del dominio di forma non regolare mediante l'assemblaggio di elementi finiti di forma molto regolare, errori di interpolazione della soluzione all'interno dei singoli elementi finiti mediante semplici funzioni polinomiali, errori di calcolo inerenti al numero limitato di cifre significative con cui lavora un computer ed ai conseguenti troncamenti decimali delle quantità numeriche utilizzate e i facili errori di modellazione cui l'utente è soggetto.